Jörg Liesen | Volker Mehrmann

Lineare Algebra

Ein Lehrbuch über die Theorie mit Blick auf die Praxis

STUDIUM

BACHELORKURS

Hochschultexte

Analysis . Lineare Algebra . Numerik .
Stochastik . Differentialgleichungen .
Komplexe Analysis . Optimierung .
Algebra . Zahlentheorie . Geometrie

VIEWEG+TEUBNER

Jörg Liesen | Volker Mehrmann

Lineare Algebra

Bachelorkurs Mathematik

Herausgegeben von:
Prof. Dr. Martin Aigner,
Prof. Dr. Heike Faßbender,
Prof. Dr. Jürg Kramer,
Prof. Dr. Peter Gritzmann,
Prof. Dr. Volker Mehrmann,
Prof. Dr. Gisbert Wüstholz

Die Reihe ist zugeschnitten auf den Bachelor für mathematische Studiengänge.
Sie bietet Studierenden einen schnellen Zugang zu den wichtigsten mathematischen Teilgebieten. Die Auswahl der Themen entspricht gängigen Modulen, die in einsemestrigen Lehrveranstaltungen abgehandelt werden können.
Die Lehrbücher geben eine Einführung in ein mathematisches Teilgebiet. Sie sind im Vorlesungsstil geschrieben und benutzerfreundlich gegliedert. Die Reihe enthält Hochschultexte und kurz gefasste Skripte und soll durch Übungsbücher ergänzt werden.

Lars Grüne / Oliver Junge
Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wolfgang Fischer / Ingo Lieb
Einführung in die Komplexe Analysis

Jörg Liesen / Volker Mehrmann
Lineare Algebra

Martin Aigner
Zahlentheorie

www.viewegteubner.de

Jörg Liesen | Volker Mehrmann

Lineare Algebra

Ein Lehrbuch über die Theorie mit Blick auf die Praxis

STUDIUM

VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Prof. Dr. Jörg Liesen
Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Straße des 17. Juni 136
10623 Berlin

liesen@math.tu-berlin.de

Prof. Dr. Volker Mehrmann
Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Straße des 17. Juni 136
10623 Berlin

mehrmann@math.tu-berlin.de

1. Auflage 2011

Lektorat: Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Vieweg+Teubner Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.
Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0081-7

Vorwort

Das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxis, zwischen Denken und Beobachten, ist die Mathematik; sie baut die verbindende Brücke und gestaltet sie immer tragfähiger. Daher kommt es, dass unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Dienstbarmachung der Natur beruht, ihre Grundlage in der Mathematik findet.
(David Hilbert)

Diese Einschätzung des berühmten deutschen Mathematikers David Hilbert (1862–1943) ist heute aktueller denn je. Die Mathematik hat nicht nur die klassischen Naturwissenschaften Biologie, Chemie und Physik durchdrungen, ihre Methoden sind auch unverzichtbar geworden in den Ingenieurwissenschaften, im modernen Wirtschaftsleben, in der Medizin und in vielen anderen Lebensbereichen. Die fortschreitende Mathematisierung der Welt wird ermöglicht durch die *transversale Stärke* der Mathematik: Die in der Mathematik entwickelten abstrakten Objekte und Operationen können zur Beschreibung und Lösung von Problemen in den unterschiedlichsten Situationen benutzt werden.

Während der hohe Abstraktionsgrad der modernen Mathematik ihre Einsatzmöglichkeiten ständig erweitert, stellt er für Studierende besonders in den ersten Semestern eine große Herausforderung dar. Viele neue und ungewohnte Begriffe sind zu verstehen und der sichere Umgang mit ihnen ist zu erlernen. Um die Studierenden für die Mathematik zu begeistern, ist es für uns als Lehrende einer Grundlagenvorlesung wie der Linearen Algebra besonders wichtig, die Mathematik als eine *lebendige Wissenschaft* in ihren Gesamtzusammenhängen zu vermitteln. In diesem Buch zeigen wir anhand kurzer historischer Notizen im Text und einer Liste ausgewählter historischer Arbeiten am Ende, dass der heutige Vorlesungsstoff der Linearen Algebra das Ergebnis eines von Menschen gestalteten, sich entwickelnden Prozesses ist.

Ein wesentlicher Leitgedanke dieses Buches ist das Aufzeigen der *unmittelbaren praktischen Relevanz* der entwickelten Theorie. Gleich zu Beginn des Buches illustrieren wir das Auftreten von Konzepten der Linearen Algebra in einigen Alltagssituationen. Wir diskutieren unter anderem mathematische Grundlagen der Internet Suchmaschine Google und der Prämienberechnung in der KFZ-Versicherung. Diese und weitere am Anfang vorgestellte Anwendungen untersuchen wir in späteren Kapiteln mit Hilfe der theoretischen Resultate. Dabei geht es uns nicht vorrangig um die konkreten Beispiele selbst oder um ihre Lösung, sondern um die Darstellung der oben erwähnten transversalen Stärke mathematischer Methoden im Kontext der Linearen Algebra.

Das zentrale Objekt in unserem Zugang zur Linearen Algebra ist die *Matrix*. Wir führen Matrizen sofort nach der Diskussion von unverzichtbaren mathematischen Grundlagen ein. Über mehrere Kapitel studieren wir ihre wichtigsten Eigenschaften, bevor wir den Sprung zu den abstrakten Vektorräumen und Homomorphismen machen. Unserer Erfahrung nach führt der matrizenorientierte Zugang zur Linearen Algebra zu einer besseren Anschauung und somit zum besseren Verständnis der abstrakten Konzepte.

Diesem Ziel dienen auch die über das Buch verteilten MATLAB-Minuten,[1] in denen die Leserinnen und Leser wichtige Resultate und Konzepte am Rechner nachvollziehen können. Die notwendigen Vorkenntnisse für diese kurzen Übungen werden im Anhang erläutert. Neben den MATLAB-Minuten gibt es eine Vielzahl von klassischen Übungsaufgaben, für die nur Papier und Bleistift benötigt werden.

Ein weiterer Vorteil der matrizenorientierten Darstellung in der Linearen Algebra ist die Erleichterung der späteren Anwendung theoretischer Resultate und ihrer Umsetzung in praxisrelevante Algorithmen. Matrizen trifft man heute überall dort an, wo Daten systematisch geordnet und verarbeitet werden. Dies ist in fast allen typischen Berufsfeldern der Bachelor-Studierenden mathematischer Studiengänge von Bedeutung. Hierauf ausgerichtet ist auch die Stoffauswahl zu den Themen Matrix-Funktionen, Singulärwertzerlegung und Kroneckerprodukte im hinteren Teil des Buches.

Trotz manchem Hinweis auch auf algorithmische und numerische Aspekte steht in diesem Buch die Theorie der Linearen Algebra im Vordergrund. Dem deutschen Physiker Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887) wird der Satz zugeschrieben:

> Eine gute Theorie ist das Praktischste, was es gibt.

In diesem Sinne möchten wir unseren Zugang verstanden wissen.

Dieses Buch basiert auf unseren Vorlesungen an der TU Chemnitz und der TU Berlin. Wir möchten uns bei allen Studierenden, Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern sowie Kolleginnen und Kollegen bedanken, die uns beim Erstellen und Korrekturlesen von Skripten, Formulieren von Aufgaben und inhaltlichen Gestalten der Vorlesungen unterstützt haben. Insbesondere gilt unser Dank André Gaul, Florian Goßler, Daniel Kresser, Robert Luce, Christian Mehl, Matthias Pester, Robert Polzin, Timo Reis, Olivier Sète, Tatjana Stykel, Elif Topcu, Wolfgang Wülling und Andreas Zeiser.

Ebenfalls bedanken möchten wir uns bei den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Vieweg+Teubner Verlags und hier insbesondere bei Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch, die unser Vorhaben stets freundlich unterstützt hat.

Berlin, im Mai 2011

Jörg Liesen
Volker Mehrmann

[1] MATLAB® ist ein eingetragenes Warenzeichen von The MathWorks Inc.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1
Lineare Algebra im Alltag

Man muss den Lernenden mit konkreten Fragestellungen
aus den Anwendungen vertraut machen,
dass er lernt, konkrete Fragen zu behandeln.
(Lothar Collatz[1])

1.1 Google und die Wichtigkeit von Internetseiten

Die Beliebtheit der Internet-Suchmaschine Google beruht zum großen Teil auf der Tatsache, dass Google in der Regel sehr schnell relevante Internetseiten für die vom Benutzer eingegebenen Suchbegriffe findet. Eine wichtige Komponente der Google-Suche ist der *PageRank Algorithmus* von den Firmengründern Sergey Brin und Larry Page, der die „Wichtigkeit" von Internetseiten bewertet. Dazu ein Zitat von `www.google.de/corporate/tech.html` (gefunden im April 2010[2]):

> Google verwendet PageRank™, um die gesamte Linkstruktur des Internets zu analysieren und herauszufinden, welche Seiten die wichtigsten sind. ... Anstatt die direkten Links zu zählen, interpretiert PageRank im Wesentlichen einen Link von Seite A auf Seite B als Votum von Seite A für Seite B. PageRank bewertet dann die Wichtigkeit einer Seite nach den erzielten Voten. PageRank berücksichtigt auch die Wichtigkeit jeder Seite, die ein Votum abgibt, da Voten von einigen Seiten einen höheren Wert aufweisen und deshalb auch der Seite, auf die der Link verweist, einen höheren Wert geben. Wichtige Seiten werden von PageRank höher eingestuft und demnach auch in den Suchergebnissen an einer vorderen Position aufgeführt.

Wir wollen diese Idee nun mathematisch beschreiben (modellieren) und orientieren uns an der Darstellung im Artikel [BryL06]. Wir möchten jeder Internetseite k eine Wichtigkeit $x_k \geq 0$ zuordnen. Dabei ist Seite k wichtiger als Seite j, wenn $x_k > x_j$ gilt. Die Verbindung einer Internetseite zum Rest des Internets erfolgt über *Links*, also über Verweise auf andere Seiten. Zudem benötigen wir den Begriff der *Backlinks* einer Internetseite, worunter die Links

---

[1] Lothar Collatz (1910–1990), deutscher Mathematiker.

[2] Im Mai 2011 schreibt Google auf der gleichen Seite: „Eine der Hauptinnovationen bei der Gründung von Google war der PageRank, eine Technologie, mit der die „Wichtigkeit" einer Webseite anhand der Links von anderen Seiten sowie weiteren Faktoren bestimmt wurde. Heute verwenden wir neben dem PageRank-Algorithmus mehr als 200 Faktoren, um Websites einzuordnen, und wir aktualisieren diese Algorithmen jede Woche."

J. Liesen, V. Mehrmann, *Lineare Algebra*, DOI 10.1007/978-3-8348-8290-5_1,

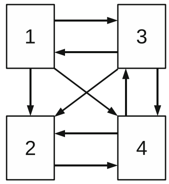


Abb. 1.1 Verknüpfungsstruktur in einem „4-Seiten-Internet"

von anderen Seiten auf diese Seite (in der Google-Beschreibung oben die *Voten* für diese Seite) verstanden werden. Im 4-seitigen Internet in Abb. 1.1 hat zum Beispiel Seite 1 Links auf die Seiten 2, 3 und 4, und einen Backlink von der Seite 3.

Der einfachste Ansatz zur Definition der Wichtigkeit von Internetseiten ist die Zählung der Anzahl ihrer Backlinks – je mehr Seiten auf eine gegebene Seite zeigen, d. h. je mehr Seiten ein Votum für eine Seite abgeben, desto wichtiger ist diese Seite. Im 4-Seiten-Internet von Abb. 1.1 ergibt dieser Ansatz die folgenden Werte:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3.$$

Hier sind somit die Seiten 2 und 4 die wichtigsten Seiten und beide sind gleich wichtig.

In diesem Ansatz ist jedoch die Wichtigkeit der Backlinks selbst nicht berücksichtigt. Dabei entspricht es sowohl der Intuition als auch der obigen Beschreibung von Google, dass eine Seite wichtiger sein sollte, wenn wichtige Seiten auf sie zeigen. Somit könnten wir x_k als Summe der Wichtigkeiten aller Backlinks der Seite k definieren. Im Beispiel von Abb. 1.1 ergibt dies die folgenden vier Gleichungen, die gleichzeitig erfüllt sein müssen:

$$x_1 = x_3, \quad x_2 = x_1 + x_3 + x_4, \quad x_3 = x_1 + x_4, \quad x_4 = x_1 + x_2 + x_3.$$

Dies ist schon fast die von Google beschriebene Strategie von PageRank. Allerdings wird hierbei nicht die Anzahl der Links einer Seite berücksichtigt, also wie viele Voten eine Seite für andere Seiten des Internets abgibt. Ohne diese Berücksichtigung wäre es jedoch möglich, durch Hinzufügen von Links die eigene Wichtigkeit zu erhöhen.

Um Letzteres zu vermeiden, gewichten wir die Backlinks jeweils mit der Anzahl ihrer Links. Wir verwirklichen damit eine Art „Internet-Demokratie": *Jede Seite kann andere Seiten (aber nicht sich selbst) „wählen" und jede Seite hat insgesamt eine „Stimme" zu vergeben.*

Im Beispiel von Abb. 1.1 sehen die entsprechenden Gleichungen für die unbekannten Wichtigkeiten x_1, x_2, x_3 und x_4 so aus:

$$x_1 = \frac{x_3}{3}, \quad x_2 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{2}, \quad x_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_4}{2}, \quad x_4 = \frac{x_1}{3} + x_2 + \frac{x_3}{3}. \tag{1.1}$$

Wir haben es hier mit vier Gleichungen für die vier unbekannten Wichtigkeiten zu tun. Alle diese Gleichungen sind *linear*,[3] d. h. die Unbekannten x_k treten nur in der ersten

[3] Das Wort *linear* stammt vom lateinischen *linea* ab, was „(gerade) Linie" bedeutet; *linearis* bedeutet „aus Linien bestehend".

Potenz auf. Wir werden in Kap. 6 sehen, wie die Gleichungen in (1.1) zu einem *linearen Gleichungssystem* zusammengefasst werden können. Das Studium und die Lösung solcher Systeme ist eine der wichtigsten Aufgaben der Linearen Algebra. Dieses Beispiel zeigt, dass die Lineare Algebra ein mächtiges Modellierungswerkzeug darstellt: Wir haben ein konkretes Problem, die Bestimmung der Wichtigkeit von Internet-Seiten, auf ein Problem der Linearen Algebra überführt. Dieses Problem werden wir in Abschn. 8.3 genauer untersuchen.

Der Vollständigkeit halber sei noch kurz erwähnt, dass eine Lösung für die vier Unbekannten (berechnet mit MATLAB und gerundet auf die zweite Nachkommastelle) durch

$$x_1 = 0.14, \quad x_2 = 0.54, \quad x_3 = 0.41, \quad x_4 = 0.72,$$

gegeben ist. Die wichtigste Seite ist also Seite 4. Man kann diese Lösung noch beliebig skalieren, d. h. alle Wichtigkeiten x_k mit der gleichen positiven Konstante multiplizieren. Dadurch kann man z. B. stets die Wichtigkeit der wichtigsten Seite auf 1 oder jeden anderen positiven Wert setzen. Eine solche Skalierung ist manchmal aus rechentechnischen oder auch rein optischen Gründen vorteilhaft. Sie ist erlaubt, weil sie den wesentlichen Informationsgehalt der Lösung, nämlich die Rangfolge der Seiten entsprechend ihrer Wichtigkeit, unverändert lässt.

1.2 Schadensfreiheitsklassen in der Kraftfahrzeug-Versicherung

Versicherungsunternehmen berechnen die zu zahlenden Beiträge ihrer Kunden, die sogenannten Versicherungsprämien, nach dem versicherten Risiko: je höher das Risiko, desto höher die Prämie. Entscheidend für den geschäftlichen Erfolg des Versicherers auf der einen Seite und den Geldbeutel des Kunden auf der anderen ist daher die Identifikation und Bewertung von Faktoren, die zu einem erhöhten Risiko beitragen.

Im Fall einer KFZ-Versicherung sind unter den möglichen Faktoren zum Beispiel die jährliche Fahrleistung, die Entfernung zwischen Wohnung und Arbeitsplatz, der Familienstatus, das Geschlecht oder das Alter der Fahrerin oder des Fahrers, aber auch das Modell, die Motorleistung oder sogar die Farbe des Fahrzeugs. Vor Vertragsabschluss muss der Kunde seiner Versicherung Informationen über einige, manchmal alle dieser Faktoren mitteilen.

Als bester Indikator für das Auftreten von Schadensfällen eines Kunden in der Zukunft gilt die Anzahl seiner Schadensfälle in der Vergangenheit. Um dies in die Prämienberechnung einzubeziehen, gibt es das System der „Schadensfreiheitsklassen“. In diesem System werden die Versicherten in relativ homogene Risikogruppen aufgeteilt, deren Prämien relativ zu ihrer Schadensvergangenheit bestimmt werden. Wer in der Vergangenheit wenige Schadensfälle hatte, erhält einen Nachlass auf seine Prämie.

Zur mathematischen Beschreibung eines Systems von Schadensfreiheitsklassen benötigt man eine Menge solcher Klassen, $\{K_1, \ldots, K_n\}$, und eine Übergangsregel zwischen den Klassen. Dabei sei K_1 die „Einsteigerklasse“ mit dem höchsten Beitrag und K_n die Klasse mit dem niedrigsten Beitrag, d. h. dem höchsten Nachlass. Der Nachlass wird meist in Prozent vom „Einsteigerbeitrag“ angegeben. Wir betrachten ein einfaches Beispiel:

	K_1	K_2	K_3	K_4
% Nachlass	0	10	20	40

Wir nehmen folgende Übergangsregel an:

- Kein Schadensfall: Im Folgejahr eine Klasse höher (oder in K_4 bleiben).
- Ein Schadensfall: Im Folgejahr eine Klasse zurück (oder in K_1 bleiben).
- Mehr als ein Schadensfall: Im Folgejahr (zurück) in Klasse K_1.

Nun muss der Versicherer die Wahrscheinlichkeit einschätzen, dass ein Versicherter, der sich in diesem Jahr in Klasse K_i befindet, im Folgejahr in Klasse K_j wechselt. Diese Wahrscheinlichkeit bezeichnen wir mit p_{ij}. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die Wahrscheinlichkeit (genau) eines Schadens für jeden Versicherten 0.1 beträgt (also 10%) und die Wahrscheinlichkeit zweier oder mehr Schäden 0.05 (also 5%). (In der Praxis machen die Versicherer diese Wahrscheinlichkeiten natürlich von den jeweiligen Klassen abhängig.) Dann ergeben sich zum Beispiel folgende Werte:

$$p_{11} = 0.15, \quad p_{12} = 0.85, \quad p_{13} = 0.00, \quad p_{14} = 0.00.$$

Wer in diesem Jahr in Klasse K_1 ist, bleibt in dieser Klasse bei einem oder mehreren Schäden. Dies tritt nach unserer Annahme mit Wahrscheinlichkeit $p_{11} = 0.15$ ein. Wer in Klasse K_1 ist, hat mit Wahrscheinlichkeit 0.85 keinen Schaden und daher $p_{12} = 0.85$. Letztlich besteht keine Möglichkeit, aus Klasse K_1 in diesem Jahr in eine der Klassen K_3 und K_4 im nächsten Jahr zu wechseln.

Wir können die 16 Wahrscheinlichkeiten p_{ij}, $i, j = 1, 2, 3, 4$, in einem Zahlenschema – einer *Matrix* – anordnen:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.85 & 0.00 & 0.00 \\ 0.15 & 0.00 & 0.85 & 0.00 \\ 0.05 & 0.10 & 0.00 & 0.85 \\ 0.05 & 0.00 & 0.10 & 0.85 \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Alle Einträge dieser Matrix sind nichtnegative reelle Zahlen und die Summe aller Einträge in jeder Zeile ist gleich 1.00. Eine solche Matrix wird zeilen-stochastisch genannt.

Die Analyse der Eigenschaften von Matrizen ist ein wichtiges Thema der Linearen Algebra, das im gesamten Buch immer wieder aufgegriffen und weiterentwickelt wird. Wie im obigen Google-Beispiel haben wir hier ein praktisches Problem in die Sprache der Linearen Algebra übersetzt und können es mit Hilfe der Linearen Algebra weiter untersuchen. Das Beispiel der Schadensfreiheitsklassen wird uns im Kap. 4 wieder begegnen.

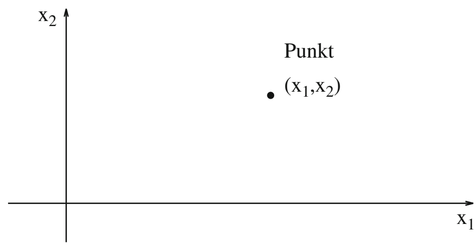
1.3 Produktionsplanung in einem verarbeitenden Betrieb

Die Planung der Produktion in einem verarbeitenden Betrieb muss viele verschiedene Faktoren, z. B. Rohstoffpreise, Arbeitskosten und vorhandenes Kapital, berücksichtigen, um aus der Gesamtinformation dieser Faktoren eine Vorgabe für die Durchführung der Produktion zu machen. Wir betrachten ein einfaches Beispiel:

Ein Betrieb produziert die zwei Produkte P_1 und P_2. Die Herstellung einer Einheit von Produkt P_i kostet a_i Euro für die eingesetzten Rohstoffe und b_i Euro für den Arbeitslohn, wobei $i = 1, 2$ ist. Der Gewinn beim Verkauf einer Einheit von Produkt P_i sei mit g_i

bezeichnet. Insgesamt stehen a Euro für den Einkauf von Rohstoffen und b Euro für die Arbeitslöhne zur Verfügung.

Jedes denkbare Produktionsprogramm ist von der Form: Produziere x_1 Einheiten von Produkt P_1 und x_2 Einheiten von Produkt P_2. Geometrisch kann jedes Produktionsprogramm als Zahlenpaar (x_1, x_2) in einem Koordinatensystem dargestellt werden:



Es sind nur Produktionsprogramme erlaubt, die mit den vorhandenen Ressourcen hergestellt werden können, d. h. es muss gelten:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq a,$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 \leq b.$$

Ziel der Produktionsplanung ist meist die Gewinnmaximierung, d. h. man sucht ein Maximum der „Gewinnfunktion"

$$\Phi(x_1, x_2) = g_1x_1 + g_2x_2.$$

Wie kann man dieses Maximum finden?

Im obigen Koordinatensystem aller Produktionsprogramme bilden die erlaubten Produktionsprogramme Halbebenen, die durch die Gradengleichungen

$$a_1x_1 + a_2x_2 = a,$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 = b,$$

beschränkt werden. Natürlich gibt es keine negativen Anzahlen von Produkten, d. h. es gilt $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$. Damit erhalten wir eine Darstellung aller möglichen Produktionsprogramme: