Karlheinz Spindler

Höhere Mathematik

Ein Begleiter durch das Studium

Verlag Harri Deutsch

K. Spindler: Höhere Mathematik Verlag Europa-Lehrmittel 978-3-8085-5550-7

Höhere Mathematik

Karlheinz Spindler

Höhere Mathematik

Ein Begleiter durch das Studium

Verlag
Harri
Deutsch

Der Autor

Prof. Dr. Karlheinz Spindler studierte Mathematik, Mechanik und Geschichte an der Technischen Hochschule Darmstadt. Nach Abschluß seines Diploms und des Staatsexamens für das Lehramt an Gymnasien war er als Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der TH Darmstadt tätig und wurde dort über ein Thema aus der Strukturtheorie Liescher Algebren promoviert. Anschließend arbeitete er zunächst zwei Jahre lang als Visiting Assistant Professor an der Louisiana State University in Baton Rouge (USA) und dann fünf Jahre lang bei einem Unternehmen der Raumfahrtindustrie am European Space Operations Centre (ESOC) in Darmstadt. Im Jahr 1997 wurde er zum Professor für Mathematik und Datenverarbeitung an die Fachhochschule Wiesbaden (seit dem 1. September 2009 Hochschule RheinMain) berufen. Dort leitet er den Studiengang "Angewandte Mathematik", der im Wintersemester 2010/2011 seinen Betrieb aufnahm und an dessen Konzeption er maßgeblich beteiligt war.

Die Webseite zum Buch

http://www.harri-deutsch.de/1872.html

Der Verlag

Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH
Gräfstraße 47
60486 Frankfurt am Main
verlag@harri-deutsch.de
www.harri-deutsch.de

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie.
Detaillierte bibliographische Daten sind im Internet unter http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-8171-1872-4

Korrigierter Nachdruck der 1. Auflage (2010), 2011

Druck: fgb. freiburger graphische betriebe (www.fgb.de)
Printed in Germany

Meiner Frau und meinen Kindern
in Liebe und Dankbarkeit

Vorwort

Im Englischen ist *Mathematics* (oder, wie Newton noch schrieb, "Mathematicks") ein Pluralwort, und auch im Französischen spricht man von *les mathématiques*. In der Tat hat sich die Mathematik, erwachsen aus den einfachen Anwendungen des Zählens von Gegenständen und des Messens von Größen (und damit den grundlegenden Disziplinen der Arithmetik und der Geometrie) in eine Vielzahl von Einzeldisziplinen aufgefächert, von denen manche auf den ersten Blick nur wenig miteinander verbindet. Diese Tendenz zur Zersplitterung wird verstärkt durch die Vielfalt der Anwendungsgebiete, in denen mathematische Methoden eingesetzt und aus deren Blickwinkel heraus mathematische Begriffe und Verfahren entwickelt werden. Mathematik durchdringt mittlerweile fast alle Lebensbereiche, und mathematische Methoden werden angewandt, um verschiedenste naturwissenschaftliche, technische, wirtschaftliche und gesellschaftliche Prozesse zu beschreiben, zu verstehen und zu optimieren.

Trotz der Vielfalt ihrer Teildisziplinen und ihrer Anwendungsbereiche hat sich die Mathematik eine erstaunliche Einheit bewahrt, und viele der faszinierendsten mathematischen Einsichten und Entdeckungen bestehen gerade darin, Zusammenhänge zwischen Sachverhalten aufzudecken, die auf den ersten Blick nichts miteinander zu tun haben. Diese Einheit kann nur erreicht werden durch einen Prozeß der Abstraktion, der versucht, im Dickicht vieler Einzelfakten nach grundlegenden allgemeinen Strukturen und Prinzipien zu suchen. Erkenntnisse und Einsichten entstehen ja nicht durch das bloße Sammeln einzelner Tatsachen und Beobachtungen, sondern erst durch deren Deutung und Einordnung in einen zugrundeliegenden Sinnzusammenhang. Daß die Suche nach grundlegenden Strukturen und Prinzipien nicht vergeblich ist – daß es diese also überhaupt gibt und daß wir Menschen auch das Potential haben, sie zu finden – liegt zum einen daran, daß die Welt, in der wir leben, kein blindes Chaos ist, sondern ein geschaffener, nach Maß, Zahl und Gewicht geordneter Kosmos, zum andern daran, daß wir selbst Teil dieses geschaffenen Kosmos sind und als vernunftbegabte Wesen die Fähigkeit haben, Gottes Gedanken nach-zudenken und obwaltende Ordnungsprinzipien aufzudecken, wenn auch – aufgrund der Endlichkeit und Beschränktheit unserer Existenz – nur stückweise und in Teilbereichen.

Als Disziplin hat die Mathematik einen eigentümlichen Doppelcharakter; sie ist sowohl Königin der Wissenschaften und Verkörperung reinsten Denkens als auch Dienstmagd vieler Anwendungsdisziplinen und Methodenreservoir zur Lösung verschiedenster Aufgaben der Praxis. Viele Anwendungsdisziplinen (wie etwa Bild- und Signalverarbeitung, Kontrolltheorie, Kontinuumsmechanik und Materialwissenschaften, Codierungstheorie und Kryptographie) haben eine nahezu vollständige Mathematisierung erfahren und erfordern den Einsatz komplexer und tiefgehender mathematischer Methoden. Die Geschichte der Mathematik ist in der Tat gekennzeichnet durch ein Wechselspiel zwischen dem Lösen ganz praktischer Probleme und einem nachfolgenden tieferen Nachdenken über die Natur dieser Probleme, das dann oft eine Eigendynamik entwickelt und aus dem sich "rein theoretische" Fragestellungen ergeben (die dann aber oft in unerwarteter Weise wieder auf die Praxis zurückwirken). Dieses Wechselspiel zeigt sich beispielsweise im Wirken von Carl Friedrich Gauß (1777-1855), der das bemerkenswerte Talent hatte, den mathematischen Kern von Fragestellungen in Anwendungsdisziplinen wie Astronomie, Vermessungswesen und Elektrizitätslehre herauszuschälen und dadurch einerseits mathematische Disziplinen ungemein befruchtete oder gar erst begründete (Ausgleichsrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Differentialgeometrie, Feldtheorie, Topologie), andererseits aber auch seine mathematischen Einsichten nutzte, um außerordentlich effektive Lösungsverfahren für die von ihm untersuchten Anwendungsprobleme zu entwickeln. Tatsächlich wird in vielen Fällen die Lösung eines ganz konkreten Einzelproblems erst durch eine eher abstrakte Herangehensweise ermöglicht, ohne die man vor lauter Bäumen den Wald nicht sieht. Abstraktion in der Mathematik ist also nicht Selbstzweck, sondern Mittel zum begrifflichen Verständnis von Sachverhalten und zum Finden von Lösungen für ganz konkrete Aufgabenstellungen.

Man kann durchaus Mathematik um ihrer selbst willen (sozusagen als "l'art pour l'art") betreiben, aber auch wenn man eher an der Verwendung mathematischer Methoden zur Lösung von Anwendungsproblemen interessiert ist, ist man gut beraten, sich ein klares Verständnis mathematischer Begriffe anzueignen und mathematische Theorien geistig zu durchdringen, statt sie nur rezeptartig anzuwenden. Die mathematisch zunehmend komplexeren Anforderungen in technisch-industriellen Anwendungen erfordern vor allem ein fundamentales Verständnis abstrakter Zusammenhänge. Eine Ausbildung in traditioneller "Ingenieursmathematik", deren Schwerpunkt auf der Vermittlung von Rechenrezepten und deren Umsetzung auf dem Computer liegt, wird diesen Anforderungen immer weniger gerecht. So erfordert etwa die mathematische Modellierung eines physikalischen, chemischen oder technischen Sachverhalts in erster Linie ein großes Repertoire an Mathematik. Ohne dieses Repertoire kann eine Ausbildung in Modellierung *per se* auf nichts zurückgreifen. Insbesondere erfordert der sachgerechte Einsatz mathematischer Methoden zur Lösung von Anwendungsproblemen Verständnis für die Erfassung naturwissenschaftlicher Konzepte durch mathematische Begriffsbildungen: Ableitungen als Änderungsraten, Integration als Aggregation von Einzelgrößen zu einer Gesamtgröße, Differentialformen als Flüsse, Integralsätze als Ausdruck von Bilanzgleichungen, Gruppen zur Beschreibung von Symmetrien, Differentialgleichungen als Entwicklungsgleichungen dynamischer Systeme, und so weiter. Ich habe mich daher beim Schreiben dieses Buches bemüht, die hinter mathematischen Begriffsbildungen steckenden Motivationen deutlich werden zu lassen.

Dies erschien mir um so wichtiger, als zuweilen auch die Anwendung mathematischer Methoden auf neuartige Praxisaufgaben zu einer Neubewertung und Erweiterung längst etablierter mathematischer Begriffe führt. Ein gutes Beispiel hierfür ist die Entwicklung der mathematischen Kontrolltheorie, in der konkrete Anwendungsprobleme zu einer kritischen Befassung und Auseinandersetzung mit grundlegenden Konzepten wie dem Ableitungsbegriff für Funktionen und dem Lösungsbegriff für Differentialgleichungen und damit zur Herausbildung neuer mathematischer Theorien führten (nichtglatte Analysis, schwache Lösungsbegriffe – etwa Viskositätslösungen – für partielle Differentialgleichungen, Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen mit unstetiger rechter Seite). Das Verhältnis zwischen mathematischer Theoriebildung einerseits, Anwendung mathematischer Methoden auf Praxisprobleme andererseits ist also ein wechselseitiges. Ich überlasse es einem Würdigeren als mir, hierzu noch einige Anmerkungen zu machen, und zitiere (im Kasten rechts) eine am 8. September 1930 in Königsberg gehaltende Rundfunkansprache von David Hilbert (1862-1943), einem der bedeutendsten Mathematiker des frühen 20. Jahrhunderts. (Es handelt sich um einen Auszug aus einer Rede mit dem Titel “Naturerkennen und Logik”, die Hilbert beim Kongreß der Vereinigung deutscher Naturwissenschaftler und Ärzte hielt.)

Die Entstehung dieses Buches ist untrennbar verbunden mit den konzeptionellen Vorarbeiten für den Studiengang “Angewandte Mathematik”, der im Wintersemester 2010/2011 seinen Betrieb am Studienort Wiesbaden der Hochschule RheinMain aufnahm und innerhalb dessen dieses Buch als Lehrbuch eingesetzt wird. Dennoch handelt es sich nicht um ein Buch über Anwendungen der Mathematik; sein Ziel ist vielmehr die Vermittlung eines soliden und tragfähigen Grundlagenwissens in mathematischen Schlüsseldisziplinen, auf dem eine spätere Einarbeitung in mathematische Spezialdisziplinen oder Anwendungsgebiete problemlos aufbauen kann. Das Buch will nicht nur mathematisches Methodenwissen vermitteln, sondern auch Verständnis für die Herausbildung mathematischer Begriffe und Theorien wecken, Zusammenhänge zwischen verschiedenen mathematischen Disziplinen aufzeigen und den Anwendungsreichtum der Mathematik wenigstens andeuten. Ich hoffe ferner, daß beim Lesen des Buches auch etwas von der Schönheit und Klarheit der Mathematik deutlich wird. Zu sehen, wie sich dicht gewobene Theoriegebäude aus (ganz wenigen und sehr einfachen) geeignet gewählten Grundbegriffen entwickeln lassen und wie sich solche Theoriegebäude zur Beschreibung, zum Verständnis und zur Gestaltung der physischen Welt einsetzen lassen, ist (in den Worten Harro Heusers) “eine geistige Erfahrung höchsten Ranges, um die kein Student betrogen werden darf”. Zu dieser geistigen Erfahrung gehört es auch, vertraut zu werden mit der Schärfe mathematischer Begriffsbildungen, der (anfangs oft pedantisch anmutenden) Genauigkeit bei der Formulierung von Definitionen und

Das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxis, zwischen Denken und Beobachten, ist die Mathematik; sie baut die verbindende Brücke und gestaltet sie immer tragfähiger. Daher kommt es, daß unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Dienstbarmachung der Natur beruht, ihre Grundlagen in der Mathematik findet. Schon Galilei sagt: Die Natur kann nur der verstehen, der ihre Sprache und die Zeichen kennengelernt hat, in der sie zu uns redet; diese Sprache aber ist die Mathematik, und ihre Zeichen sind die mathematischen Figuren. Kant tat den Ausspruch: “Ich behaupte, daß in jeder besonderen Naturwissenschaft nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden kann, als darin Mathematik enthalten ist.” In der Tat: Wir beherrschen nicht eher eine naturwissenschaftliche Theorie, als bis wir ihren mathematischen Kern herausgeschält und völlig enthüllt haben. Ohne Mathematik ist die heutige Astronomie und Physik unmöglich; diese Wissenschaften lösen sich in ihren theoretischen Teilen geradezu in Mathematik auf. Diese wie die zahlreichen weiteren Anwendungen sind es, denen die Mathematik ihr Ansehen verdankt, soweit sie solches im weiteren Publikum genießt.

Trotzdem haben es alle Mathematiker abgelehnt, die Anwendungen als Wertmesser für die Mathematik gelten zu lassen. Gauß spricht von dem zauberischen Reiz, den die Zahlentheorie zur Lieblingswissenschaft der ersten Mathematiker gemacht habe, ihres unerschöpflichen Reichtums nicht zu gedenken, woran sie alle anderen Teile der Mathematik so weit übertrifft. Kronecker vergleicht die Zahlentheoretiker mit den Lotophagen, die, wenn sie einmal von dieser Kost etwas zu sich genommen haben, nie mehr davon lassen können. Der große Mathematiker Poincaré wendet sich einmal in auffallender Schärfe gegen Tolstoi, der erklärt hatte, daß die Forderung “die Wissenschaft der Wissenschaft wegen” töricht sei. Die Errungenschaften der Industrie zum Beispiel hätten nie das Licht der Welt erblickt, wenn die Praktiker allein existiert hätten und wenn diese Errungenschaften nicht von uninteressierten Toren gefördert worden wären. Die Ehre des menschlichen Geistes, so sagte der berühmte Königsberger Mathematiker Jacobi, ist der einzige Zweck aller Wissenschaft.

Wir dürfen nicht denen glauben, die heute mit philosophischer Miene und überlegenem Tone den Kulturuntergang prophezeien und sich in dem Ignorabimus gefallen. Für uns gibt es kein Ignorabimus, und meiner Meinung nach auch für die Naturwissenschaft überhaupt nicht. Statt des törichten Ignorabimus heiße im Gegenteil unsere Losung:

Wir müssen wissen. Wir werden wissen.

der Sorgfalt und Strenge bei der Durchführung mathematischer Beweise. Ich habe mich daher beim Schreiben dieses Buches um Lesbarkeit bemüht, aber nicht um den Preis des Verwässerns, des Weglassens von Beweisen oder des Vermeidens “unbequemer” Begriffsbildungen. Ein Mathematikbuch ist anstrengend zu lesen und eignet sich nur in begrenztem Maße als Bettlektüre; dieses Buch ist hier keine Ausnahme. Es liest sich am besten mit Papier und Bleistift in Griffweite, um Rechnungen und Überlegungen aktiv nachzuvollziehen. Die einzelnen Abschnitte können von ihrem logischen Aufbau her in derjenigen Reihenfolge durchgearbeitet werden, in der sie im Buch erscheinen, aber Umstellungen sind auf vielerlei Art möglich; wie in der Praxis verfahren wird, hängt vom jeweiligen Curriculum ab. Was den Aufbau und Inhalt angeht, so will ich kurz einige der Punkte aufführen, die mir beim Schreiben des Buches wichtig waren.

• **Herauspräparieren propädeutischer Kapitel.** Es ist in Mathematikstudiengängen vielfach üblich, einführende Themen (mengentheoretische und aussagenlogische Grundlagen, vollständige Induktion, Zahlbegriff, elementare Kombinatorik usw.) in die Anfängervorlesungen zur Analysis und zur Linearen Algebra zu integrieren, obwohl sie dort thematisch eigentlich gar nicht hingehören. In diesem Buch wurde solches propädeutische Material in separate Kapitel ausgegliedert, die jeweils für sich behandelt werden können. Dies erleichtert auch die Verwendung des Materials in unterschiedlichen Lehrveranstaltungen und Studiengängen.

• **Sorgfältige Grundlegung.** Ich habe viel Wert darauf gelegt, ein durch und durch solides Fundament für spätere mathematische Aktivitäten zu legen. Daher werden auch (vermeintlich) einfache und aus der Schule bekannte Themen wie elementare Zahlentheorie, Bruchrechnung oder Elementargeometrie behandelt. Dabei bietet das Buch weit mehr als nur eine Wiederholung des Schulstoffs: die Darstellung ist mathematisch streng, knüpft Bezüge zu späteren Themen und schält jeweils die zugrundeliegende mathematische Struktur heraus (Ringe und Körper beim Umgang mit Gleichungen, angeordnete Körper beim Umgang mit Ungleichungen, Gruppen beim Umgang mit Symmetrien in kombinatorischen Problemen). Die reellen Zahlen werden in geometrischer Weise eingeführt, wobei der Grenzwertbegriff (der implizit im verwendeten Dedekindschen Schnittaxiom steckt) zunächst vermieden wird; dies erlaubt u.a. eine grenzwertfreie Einführung der Winkelfunktionen. Durch diese sorgfältige Aufbereitung von bereits in der Schule behandelten Themen (wie später dann auch der Differential- und Integralrechnung) ist das Buch auch in Lehramtsstudiengängen einsetzbar.

• **Frühe Einführung abstrakter Begriffe.** Abstrakte Begriffe werden nicht schamhaft vermieden, sondern ganz bewußt und sehr früh explizit gemacht. Ein Beispiel ist etwa der Begriff der Quotientenstruktur, der bereits in der Schule vielfach implizit benutzt wird, ohne klar herausgearbeitet zu werden (Kardinalzahlen als Äquivalenzklassen von Mengen, Brüche als Äquivalenzklassen von Zahlenpaaren, Vektoren als Pfeilklassen). Abstraktion wird in diesem Buch nicht als etwas Unangenehmes und möglichst zu Vermeidendes behandelt, sondern als etwas sehr Wünschenswertes, das begriffliche Klarheit und universelle Einsetzbarkeit mathematischer Methoden überhaupt erst ermöglicht und an das man sich frühzeitig gewöhnen sollte. Insbesondere werden algebraische, ordnungstheoretische und topologische Strukturen früh definiert, und die Existenz solcher Strukturen in verschiedenen Situationen wird systematisch herausgearbeitet.

• **Zahlreiche durchgerechnete Aufgaben und Beispiele.** Das Buch enthält eine Vielzahl komplett durchgerechneter Aufgaben und Beispiele, um die eingeführten Begriffe und Methoden zu verdeutlichen. Ein umfangreicher Aufgabenband zu dem Buch ist in Arbeit.

• **Physikalische Motivation mathematischer Begriffsbildungen.** Viele mathematische Begriffe stammen aus der Physik, und die zugrundeliegende physikalische Intuition ist auch notwendig, um diese Begriffe später zur mathematischen Modellierung realer Systeme heranzuziehen. Dies wird sorgfältig herausgearbeitet, und es wird jeweils klar dargelegt, warum der eingeführte mathematische Begriff tatsächlich das jeweilige physikalische Konzept widerspiegelt und welche physikalische Bedeutung mathematische Sätze haben (Orientierung einer Basis und Dreifingerregel der rechten Hand; materielle, lokale und konvektive Ableitungen als zeitliche Änderungsraten von Feldgrößen; äußere Ableitungen von Differentialformen und deren Zusammenhang mit der Rotation und Divergenz von Vektorfeldern; Stokesscher Integralsatz und Reynoldssches Transporttheorem). Ferner werden zahlreiche Beispiele aus der Mechanik behandelt, wobei wieder viel Wert auf eine sorgfältige Klärung der Begriffe gelegt wird (etwa der Winkelgeschwindigkeit und des Trägheitsmomententensors bei der Bewegung starrer Körper). Das Buch ist daher auch geeignet für die Mathematikausbildung innerhalb eines Studiums der Physik.

• **Weitgehend koordinatenfreies Arbeiten.** Eine Temperaturverteilung ist eine Funktion, die jedem Raumpunkt einen (als reelle Zahl darstellbaren) Temperaturwert zuordnet. Da die Punkte des uns umgebenden Raums nicht von Natur aus (zwecks einfacherer Identifizierbarkeit durch potentielle Beobachter) mit Zahlentripeln versehen sind, ist eine solche Funktion etwas grundsätzlich anderes als eine Funktion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Ausgehend von dieser (physikalisch motivierten) Sichtweise werden Begriffe möglichst koordinatenfrei eingeführt; in der Linearen Algebra etwa sind lineare Abbildungen und quadratische Formen fundamentale Begriffe, nicht die Matrizen, durch die diese repräsentiert werden können. Eine koordinatenfreie Einführung mathematischer Begriffe ist nicht nur vorteilhaft für das begriffliche Verständnis, sondern auch bei der Lösung ganz konkreter Aufgaben.

• **Schlüsselrolle der Linearen Algebra.** Der Linearen Algebra kommt eine fundamentale Rolle zu. Zunächst ist bereits die Entwicklung dieser mathematischen Disziplin aus zwei verschiedenen Wurzeln (systematische Untersuchung linearer Gleichungssysteme einerseits, elementargeometrische Vektorrechnung andererseits) Ausdruck einer arithmetisch-geometrischen Synthese, die auch für andere Bereiche grundlegend ist (man denke etwa an kommutative Algebra und algebraische Geometrie); ich habe mich daher bemüht, sowohl arithmetische als auch geometrische Aspekte der Linearen Algebra zu berücksichtigen. Ferner beruht die gesamte Analysis darauf, nichtlineare Begriffe und Methoden mittels Linearisierung auf Lineare Algebra zurückzuführen; dies wird im Rahmen dieses Buches herausgearbeitet (Ableitungen als Linearisierungen von Funktionen an gegebenen Stellen, höhere Ableitungen als multilineare Abbildungen, Mannigfaltigkeiten als deformierte lineare Räume und so weiter). Schließlich lassen sich weite Teile der Funktionalanalysis als Erweiterung der Linearen Algebra auf (geeignet topologisierte) unendlichdimensionale Vektorräume verstehen. Um dies vorzubereiten, werden von vornherein auch unendlichdimensionale Vektorräume betrachtet und frühzeitig Skalarprodukte und Normen auf Vektorräumen behandelt, was die Behandlung einiger Sätze der Funktionalanalysis erlaubt (ohne daß in diesem Buch systematisch Funktionalanalysis betrieben würde).

• **Berücksichtigung numerischer Aspekte.** Bereits bei der Einführung des Grenzwertbegriffs wird dessen genuin numerischer Charakter betont (Approximation einer Größe durch ein Glied einer gegen diese Größe konvergierenden Folge, Wichtigkeit der zugehörigen Fehlerabschätzung, Bedeutung der Konvergenzgeschwindigkeit) und an Beispielen aufgezeigt (Babylonisches Wurzelziehen, Berechnung der Zahlen e und π, numerische Berechnung von Logarithmen). Numerische Aspekte und Methoden sind durchgängig in den Text integriert (Satz von Gerschgorin, Vektor- und Matrixnormen, Fehlerabschätzung bei linearen Gleichungssystemen, Bestapproximation in Skalarprodukträumen, lineare Ausgleichsrechnung, Polynominterpolation, numerische Integration, Newtonverfahren in einer und in mehreren Variablen, Satz von Kantorovitch, Eulerpolygone zur Approximation der Lösung eines Anfangswertproblems und so weiter). Zahlreiche weitere numerische Verfahren werden im Aufgabenband behandelt, insbesondere solche, bei denen auf die Herleitung strenger Konvergenznachweise und Fehlerabschätzungen verzichtet wird.

• **Behandlung der Differentialrechnung vor der Integralrechnung.** Es wird zunächst die Differentialrechnung sowohl in einer als auch in mehreren Variablen (und sogar allgemein in Banachräumen) behandelt, bevor die Integralrechnung entwickelt wird. Dies hat den Vorteil, daß bei der Behandlung der Integrationstheorie bereits Vertrautheit mit Funktionen in mehreren Veränderlichen besteht und eine gewisse mathematische Reife erreicht ist, die die simultane Einführung des Riemannschen und des Lebesgueschen Integralbegriffs erlaubt. Strukturelle Eigenschaften des Integrals können durch diese Vorgehensweise gleich für Funktionen in mehreren Variablen hergeleitet werden. Diese Umstellung wirkt sich kaum auf die übliche Entwicklung der Differentialrechnung aus; lediglich der Beweis der Mittelwertabschätzung ist zu modifizieren (und natürlich muß die Integraldarstellung des Taylor-Restglieds nach hinten gezogen werden). Selbstverständlich kann wahlweise vor dem Studium von Funktionen in mehreren Variablen auch zunächst die Differential- und Integralrechnung in einer Variablen vollständig behandelt werden.

• **Ausführliche Diskussion von Differentialgleichungen.** Trotz seiner Kompaktheit enthält das Kapitel über gewöhnliche Differentialgleichungen mehr Material als in Einführungen üblich: grundlegende Begriffe und elementare Lösungsmethoden, einige motivierende Beispiele, den Existenzsatz von Peano, die Eindeutigkeitssätze von Cauchy und Osgood, Aussagen zum maximalen Lösungsintervall eines Anfangswertproblems, stetige und glatte Abhängigkeit der Lösung von Anfangsbedingungen und Parametern sowie spezielle Lösungsmethoden für lineare Differentialgleichungen (insbesondere mit konstanten oder periodischen Koeffizienten). Anwendungen aus der Physik (Himmelsmechanik, Starrkörperbewegung) sowie ein Kapitel über dynamische Systeme runden die Darstellung ab.

Was den Stil des Buches angeht, so habe ich mich einerseits um Ausführlichkeit bei der Motivation von Begriffsbildungen bemüht (und dabei auch einige außermathematische Abschweifungen nicht gescheut), andererseits aber um einen kompakten Stil bei Beweisen und bei der Entwicklung der behandelten Theorien. Das mag angesichts des Umfangs, den dieses Buch schließlich angenommen hat, nicht sehr glaubwürdig erscheinen, aber ein Buch, das mit der Einführung des Mengenbegriffs beginnt und mit dem Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes endet und in dem alle Aussagen ausnahmslos bewiesen werden, erreicht zwangsläufig einen gewissen Umfang – auch ohne Weitschweifigkeit des Autors. Trotz seines Umfangs kann und will dieses Buch nicht für sich reklamieren, einen Gesamtüberblick über die Mathematik zu bieten. Dazu wären Numerische Mathematik und Optimierung systematischer abzuhandeln gewesen, ebenso die Funktionalanalysis und die Theorie dynamischer Systeme (wo etwa Verzweigungsphänomene oder gesteuerte dynamische Systeme gar nicht vorkommen). Einige wichtige Gebiete fehlen völlig, etwa Algebra (Gruppen-, Ring- und Körpertheorie; kommutative Algebra und algebraische Geometrie), Variationsrechnung oder partielle Differentialgleichungen. Zu einer adäquaten Behandlung all dieser Themen hätte ich einen zweiten Band gleichen Umfangs schreiben müssen, und irgendwo war eine Grenze zu ziehen – selbst ein hartgesottener Autor wird nervös, wenn sein Manuskript (zumal im DIN A 4-Format) einer vierstelligen Seitenzahl zustrebt. Sollten allerdings manche Auslassungen als besonders störend empfunden werden, so bin ich für entsprechende Kommentare jederzeit dankbar.

Rechtschreibung. Ich betrachte die Rechtschreibreform der Jahre 1996 bis 2006 in ihren inhaltlichen Festlegungen und der Art ihrer politischen Durchsetzung als ein Symptom sprachlichen und kulturellen Niedergangs. Das Buch orientiert sich daher an den vor dieser Reform gültigen Regeln; die Lesbarkeit ist dadurch in keiner Weise gefährdet. Dem Verlag danke ich für die Bereitschaft, meinem ausdrücklichen Wunsch nach Verwendung der alten Rechtschreibung nachzukommen.

Typographische Konventionen. Sätze und Definitionen sind *kursiv* gesetzt, um sie vom normalen Text abzuheben. Das Ende eines Beweises ist jeweils mit einem Quadrat ■ markiert, das Ende eines Beispiels oder einer Gruppe von Beispielen mit einer Raute ♦. Bemerkungen werden typischerweise mit einer Raute beendet, aber dann mit einem Quadrat, wenn die Bemerkung den Charakter eines Beweises hat. Die einzelnen Abschnitte sind durchlaufend numeriert, die Bestandteile (Sätze, Definitionen, Beispiele usw.) innerhalb eines Abschnitts ebenfalls; beispielsweise bezeichnet die Nummer (103.7) den Bestandteil 7 des Abschnitts 103. Jeweils vier Abschnitte wurden zu einem Kapitel zusammengefaßt, aber auf eine Numerierung der einzelnen Kapitel wurde verzichtet.

Danksagungen. Dieses Vorwort wäre unvollständig ohne eine Bezeugung tiefen Dankes an diejenigen, die mich beim Schreiben des vorliegenden Buches unterstützten. In erster Linie ist hier Frau Dr. Renate Schappel zu nennen, die sich mit bewundernswerter Energie und Sorgfalt der Herkulesaufgabe annahm, das vollständige Manuskript (teilweise in verschiedenen Versionen) kritisch durchzulesen. Sie deckte eine Unzahl von Fehlern auf, und nichts war vor ihrem kritischen Blick sicher: einfache Tippfehler, Rechenfehler in Beispielen, fehlerhafte oder unvollständige Schlüsse in mathematischen Herleitungen, stilistisch verunglückte Formulierungen, falsche Verweise, selbst Fehler in den Geburts- und Todesjahren von Mathematikern, die im Text genannt werden. Ohne ihre Hilfe wäre dieses Buch schlechterdings nicht denkbar. Mein Dank gilt ferner Frau Prof. Dr. Evgenia Kirillova⋆, die Teile des Manuskripts las und ebenfalls mit ihren Korrekturen, Kommentaren und Änderungsvorschlägen zur Verbesserung der Darstellung beitrug. Weiterhin danke ich Herrn cand. rer. nat. Claus Meister, der mir immer dann hilfreich zur Seite stand, wenn eher esoterische Befehle des Textverarbeitungssystems benötigt wurden oder wenn es Probleme bei der Erzeugung und Einbindung von Graphiken gab. Bei Herrn Klaus Horn vom Verlag Harri Deutsch bedanke ich mich ganz herzlich für die kompetente verlagsseitige Umsetzung des Werkes und die jederzeit angenehme Zusammenarbeit.

Schließlich gilt mein ganz besonderer Dank meiner Frau und meinen beiden Kindern, die am meisten unter der Entstehung dieses Buches zu leiden hatten – durch einen oft zwar körperlich, aber nicht geistig anwesenden Ehemann und Vater, der zuweilen auch mißmutig wurde, wenn es mit dem Schreiben nicht recht vorwärts ging. Ihnen ist dieses Buch gewidmet.

Schlußbemerkung. Von Richard Feynman (1918-1988), der im Jahr 1965 den Nobelpreis für Physik erhielt, stammt die folgende Bemerkung:

> *There are two kinds of mathematics books; the kind you can't read past the first sentence, and the kind you can't read past the first page.*

Autor und Verlag hegen die Hoffnung, daß diese Bemerkung nicht auf das vorliegende Buch zutrifft (eine nicht ganz unbegründete Hoffnung, wenn jemand bis hierher gelesen haben sollte), und sind für Kommentare, Korrektur-, Verbesserungs- und Ergänzungsvorschläge sowie Wünsche für den in Arbeit befindlichen Aufgabenband jederzeit dankbar.

Wiesbaden, A. D. 2010 Karlheinz Spindler

⋆ Евгения Вадимовна Кириллова; an dieser Stelle erweist sich die Verfügbarkeit kyrillischer Schriftzeichen in meinem Textverarbeitungssystem als unwiderstehliche Versuchung.

INHALT

Rechnen mit Grenzwerten

Elementare Funktionen

Metrische Strukturen

Topologische Strukturen

Differentialrechnung in einer Variablen

Differentialrechnung in Banachräumen

Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten

Inhaltsbestimmung von Mengen

Der Begriff des Integrals

Berechnung von Integralen

Integration auf Mannigfaltigkeiten

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Dynamische Systeme

Integraltransformationen

Grundlagen der Stochastik

Anwendung stochastischer Methoden

Funktionentheorie

Die folgende Aufgabe wurde im Jahr 1779 erstmals formuliert und gelöst, und zwar von dem italienischen Mathematiker Gianfrancesco di Fagnano (1715-1797), der sich, ebenso wie sein Vater, Giulio de Toschi di Fagnano (1682-1766), vornehmlich mit Problemen der Geometrie und Analysis beschäftigte.

(38.16) Problem von Fagnano. *Ein Dreieck mit den Ecken A, B und C sei gegeben. Gesucht ist ein möglichst kurzer geschlossener Streckenzug, der die drei Seiten des Dreiecks miteinander verbindet. Wie läßt sich ein solcher Streckenzug finden?*

Lösung. Gesucht sind Punkte A' auf $[B,C]$, B' auf $[C,A]$ und C' auf $[A,B]$ derart, daß

$$(\star) \qquad \overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'A'}$$

möglichst klein wird. Wir denken uns zunächst den Punkt C' auf $[A,B]$ fest gewählt und überlegen, wie die Punkte A' und B' gewählt werden müssen, damit der Ausdruck $(\star)$ minimal wird. Dazu führen wir zunächst noch die beiden Punkte C_1 und C_2 ein, die aus C' durch Spiegelung an den Geraden $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ entstehen.

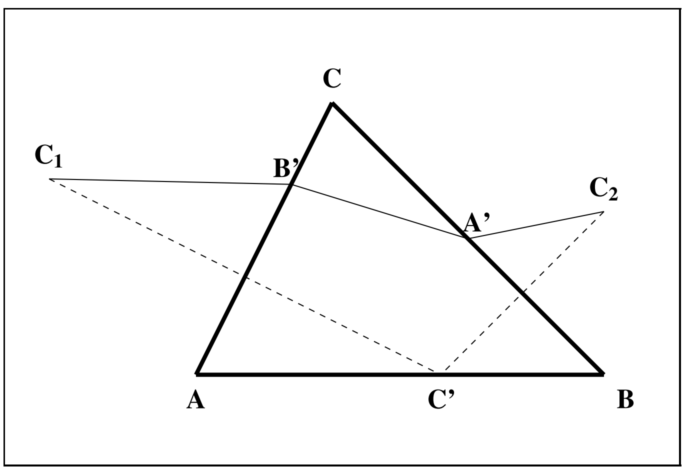

Abb. 38.16: Konstruktion zur Lösung des Problems von Fagnano.

Da ein Liniensegment bei einer Spiegelung seine Länge nicht ändert, läßt sich für beliebige Punkte $A' \in [B,C]$ und $B' \in [A,C]$ der Ausdruck $(\star)$ in der Form

$$(\star\star) \qquad \begin{aligned} & \overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'A'} \\ = \; & \overline{A'B'} + \overline{B'C_1} + \overline{C_2A'} \\ = \; & \overline{C_1B'} + \overline{B'A'} + \overline{A'C_2} \end{aligned}$$

schreiben, stimmt also mit der Länge des Polygonzugs $C_1B'A'C_2$ überein. Dieser hat die minimale Länge $\overline{C_1C_2}$, und diese minimale Länge wird genau dann angenommen, wenn die vier Punkte C_1, B', A' und C_2 auf einer Geraden liegen, wenn also B' und A' die Schnittpunkte der Geraden $\overline{C_1C_2}$ mit den Seiten AC bzw. BC sind, wenn also mit den Bezeichnungen der folgenden Skizze die Beziehungen $B' = B^\star$ und $A' = A^\star$ gelten. Für diese Wahl von A' und B' geht dann $(\star)$ gemäß $(\star\star)$ über in $\overline{C_1B^\star} + \overline{B^\star A^\star} + \overline{A^\star C_2} = \overline{C_1C_2}$.

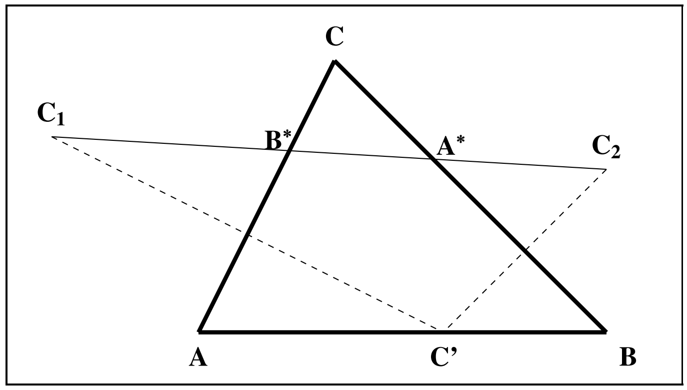

Abb. 38.17: Optimale Wahl von A' und B' bei gegebenem Punkt C'.

Zur endgültigen Lösung der Minimierungsaufgabe stellt sich nun noch die Frage, wie der Punkt C' zu wählen ist, damit die von diesem induzierte Strecke $\overline{C_1C_2}$ minimal wird. Da die Winkel C_1CA und ACC' bzw. $C'CB$ und BCC_2 jeweils durch Spiegelung auseinander hervorgehen und daher gleich sind, gilt $\angle(C_1CC_2) = 2\cdot\angle(ACB) = 2\gamma$; der Winkel C_1CC_2 ist also völlig unabhängig von der Wahl des Punktes C'. Je kürzer nun $\overline{CC'} = \overline{CC_1} = \overline{CC_2}$ ist, desto kürzer ist auch $\overline{C_1C_2}$.

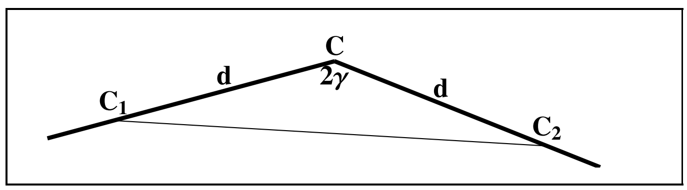

Abb. 38.18: Je kürzer $d := \overline{CC'}$, desto kürzer auch $\overline{C_1C_2}$.

Die kürzestmögliche Strecke $\overline{CC'}$ ergibt sich nun aber, wenn wir für C' den Fußpunkt $C^\star$ des Lotes von C auf die Gerade AB wählen. Damit ist die Lösung des Problems gefunden: Fälle von jeder der drei Ecken A, B, C das Lot auf die jeweils gegenüberliegende Dreiecksseite und bezeichne die entstehenden Lotfußpunkte mit $A^\star$, $B^\star$, $C^\star$; der gesuchte Verbindungsweg kürzester Länge ist dann der Streckenzug $A^\star B^\star C^\star A^\star$. ■

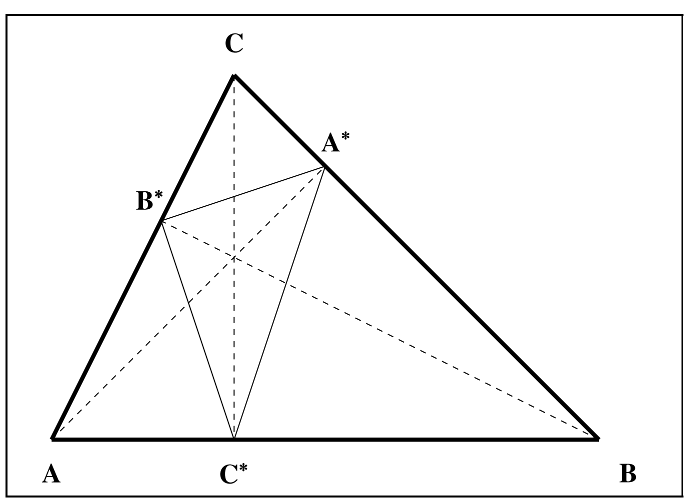

Abb. 38.19: Lösung von Fagnanos Problem.

(38.17) Bemerkung. Wer den Beweis aufmerksam verfolgt hat, wird eine Lücke festgestellt haben; die Argumentation ist nämlich nur für spitzwinklige Dreiecke uneingeschränkt gültig. Hat das Dreieck bei A einen rechten Winkel, so fallen die Punkte $B^\star$ und $C^\star$ mit A zusammen; hat das Dreieck bei A einen stumpfen Winkel, so liegen $B^\star$ und $C^\star$ außerhalb des Dreiecks. In diesen beiden Fällen ist die Lösung des Problems gegeben durch den Streckenzug $AA^\star A$ (Übungsaufgabe!); die Lösung ist also jeweils ein zu einer doppelt durchlaufenen Strecke entartetes Dreieck. ■

Das folgende Problem, das zuerst von den Mathematikern Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Pierre de Fermat (1601 oder 1607/1608-1665) und Evangelista Torricelli (1608-1647) studiert wurde, besteht darin, innerhalb eines Dreiecks einen Punkt zu finden, der von den drei Ecken den kürzesten durchschnittlichen Abstand hat. Eine praktische Einkleidung der Aufgabe könnte etwa folgendermaßen lauten: Ein Gelände hat bei A eine Wasserstelle, bei B eine Feuerstelle und bei C einen Vorratsraum. An welcher Stelle P sollte man sein Zelt aufschlagen, wenn man gleich oft zu A, B und C gehen muß und den zurückzulegenden Gesamtweg möglichst kurz halten will? Genauer formuliert lautet die Aufgabe folgendermaßen.

(38.18) Problem von Viviani, Fermat und Torricelli. *Ein Dreieck mit den Ecken A, B und C sei gegeben. Welcher Punkt P des Dreiecks minimiert den Ausdruck $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$?*

Lösung. Wir greifen uns zunächst einen beliebigen Punkt P in dem Dreieck heraus und drehen dann das Dreieck APC um $\pi/3$ um den Punkt A; das durch die Drehung entstandene Dreieck bezeichnen wir mit AQB'.

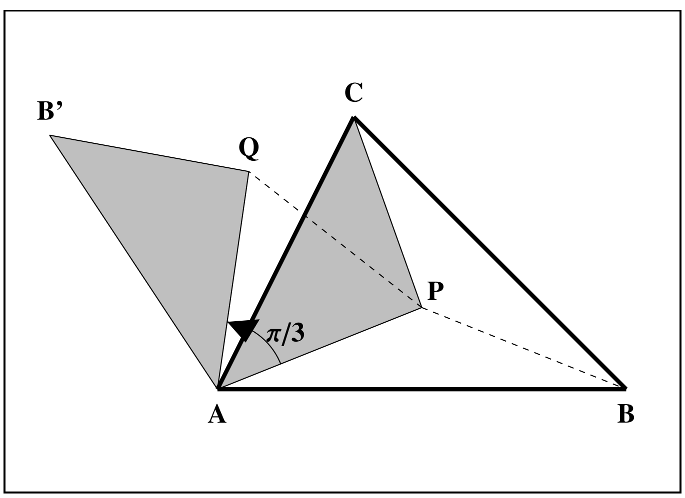

Abb. 38.20: Idee zur Lösung des Problems von Viviani, Fermat und Torricelli.

Wir stellen zunächst fest, daß der Punkt B' vollkommen unabhängig von der Wahl von P ist; das Liniensegment AB' ergibt sich ja durch eine Drehung des Liniensegments AC um $\pi/3$ um den Punkt A. Wegen $\overline{AC}=\overline{AB'}$ ist das Dreieck CAB' gleichschenklig; also stimmen die Basiswinkel $AB'C$ und $B'CA$ überein. Da der Winkel CAB' nach Konstruktion gerade $\pi/3$ ist und die Winkelsumme im Dreieck CAB' gleich π sein muß, ist jeder dieser Basiswinkel ebenfalls gleich $\pi/3$; das Dreieck $AB'C$ ist also sogar gleichseitig. (Der Punkt B' läßt sich folglich konstruieren, indem wir ein gleichseitiges Dreieck über dem Liniensegment AC errichten.)

Nach Konstruktion gilt $AP = AQ$; das Dreieck PAQ ist damit gleichschenklig, hat also bei P und Q gleiche Basiswinkel. Da der Winkel bei A aber nach Konstruktion $\pi/3$ beträgt und die Winkelsumme im Dreieck PAQ gleich π sein muß, ist jeder dieser Basiswinkel ebenfalls gleich $\pi/3$; das Dreieck PAQ ist also sogar gleichseitig, so daß $\overline{PA}=\overline{PQ}$ gilt. Der zu minimierende Ausdruck ist dann

$$\begin{aligned} &\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}\\ =\;&\overline{PQ}+\overline{PB}+\overline{QB'}\\ =\;&\overline{B'Q}+\overline{QP}+\overline{PB}, \end{aligned}$$

stimmt also mit der Länge des Linienzuges $B'QPB$ überein. Die Länge dieses Linienzuges ist aber genau dann minimal, wenn die Punkte B', Q, P und B auf einer Geraden liegen, wenn die Winkel $B'QP$ und QPB also beide gleich π sind; dies ist genau dann der Fall, wenn die Winkel $B'QA$ und APB beide gleich $2\pi/3$ sind.

Ein Punkt P erfüllt also sicher dann die gewünschte Minimalbedingung, wenn P und Q auf der Geraden BB' liegen. Gibt es einen solchen Punkt? Die Antwort ist ja, denn wir können den Winkel $\varphi := \angle AB'B$ von AC aus abtragen, erhalten einen Schnittpunkt P mit der Geraden BB' und können dann die Strecke CP von B' aus abtragen, um Q zu erhalten. (Es gilt $\varphi = 180^0-(\alpha+60^0)-\beta = 120^0-\alpha-\beta<\gamma$.)

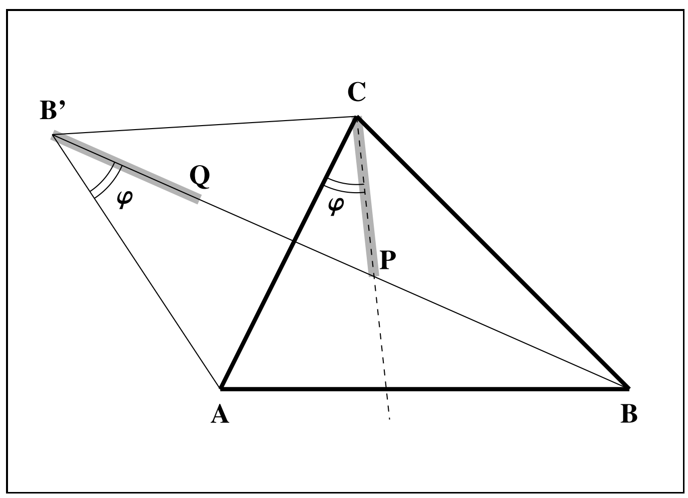

Abb. 38.21: Konstruktion zur Lösung des Problems von Viviani, Fermat und Torricelli.

Daß wir unsere Konstruktion von der Ecke A aus durchführten, war willkürlich; wir hätten genausogut von B oder C aus beginnen können. Dies liefert die folgende Konstruktion des gesuchten Punktes P: Errichte über jeder der drei Seiten des gegebenen Dreiecks ein gleichseitiges Dreieck und verbinde die dritte Ecke dieses Dreiecks mit der der Seite gegenüberliegenden. Dann schneiden sich die Geraden AA', BB' und CC' in einem Punkt P; dieser Punkt (den man auch den **Torricelli-Punkt** des Dreiecks ABC nennt) ist die eindeutige Lösung der gestellten Optimierungsaufgabe. ■

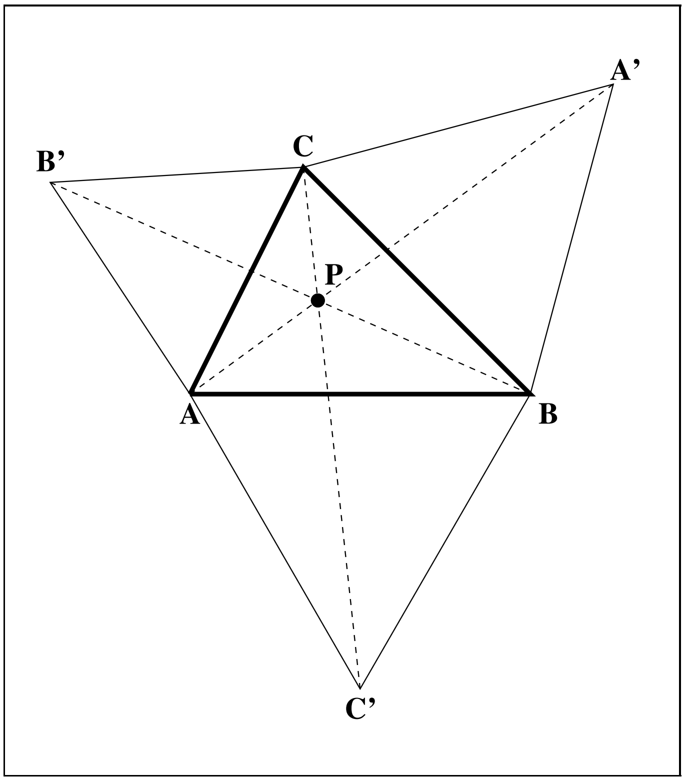

Abb. 38.22: Konstruktion des Torricelli-Punktes eines Dreiecks.

(38.19) Bemerkungen. (a) Die gegebene Lösung zeigt, daß die Winkel $\angle APB$, $\angle BPC$ und $\angle CPA$ jeweils den Wert $2\pi/3 = 120^0$ haben.

(b) Die angegebene Lösung gilt nur, wenn alle Winkel des betrachteten Dreiecks kleiner als 120^0 sind. Hat das Dreieck bei A einen Winkel von 120^0, so fällt der Torricelli-Punkt des Dreiecks mit A zusammen; ist der Winkel bei A sogar größer als 120^0, so liegt der Torricelli-Punkt außerhalb des Dreiecks und liefert nicht die Lösung der gestellten Optimierungsaufgabe. Man kann zeigen (Übungsaufgabe!), daß in diesem Fall die optimale Wahl des Punktes P gegeben ist durch $P := A$.

(c) Das Problem von Viviani, Fermat und Torricelli hat eine interessante mechanische Lösung. Wir deuten A, B und C als Punkte auf einer glatten Tischoberfläche und bohren an diesen Stellen Löcher durch die Fläche. Wir befestigen nun drei gleiche Gewichte an drei (als masselos betrachteten) Schnüren, führen die Schnurenden von unten her durch die gebohrten Löcher, verknoten die Schnüre oberhalb des Tisches und lassen los. Es wird sich ein Gleichgewichtszustand einstellen, bei dem der Schwerpunkt des Systems möglichst tief zu liegen kommt, bei dem also die Gesamtlänge der sich unterhalb des Tischs befindlichen Schnurstücke möglichst groß und damit die Gesamtlänge der sich auf dem Tisch befindlichen Schnurstücke möglichst klein ist. Der Stelle, an der der Knoten sich dann befindet, ist genau der Punkt P, für den die Gesamtlänge $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ minimal wird. ■

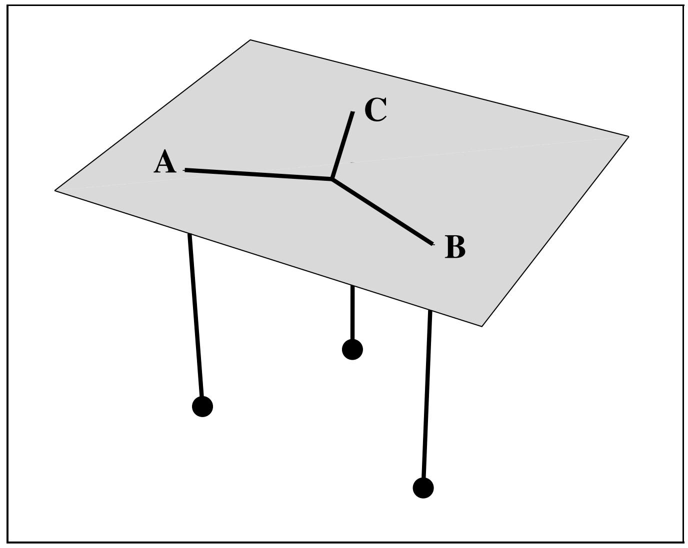

Abb. 38.23: Mechanische Lösung des Problems von Viviani, Fermat und Torricelli.

39. Kreise

Wir definieren Kreise bzw. Sphären als diejenigen geometrischen Örter, die von einem festen Punkt den gleichen Abstand haben.

(39.1) Definition. *Gegeben seien eine Ebene E, ein Punkt M in E und eine Strecke r. Der* **Kreis** *mit Mittelpunkt M und Radius r in E ist die Menge aller Punkte P in E mit der Eigenschaft $\overline{MP} = r$. Die* **abgeschlossene Kreisscheibe** *mit Mittelpunkt M und Radius r in E ist die Menge aller Punkte P in E mit der Eigenschaft $\overline{MP} \leq r$. Die* **offene Kreisscheibe** *mit Mittelpunkt M und Radius r in E ist die Menge aller Punkte P in E mit der Eigenschaft $\overline{MP} < r$.*

(39.2) Definition. *Gegeben seien ein Punkt M im Raum und eine Strecke r. Die* **Sphäre** *mit Mittelpunkt M und Radius r ist die Menge aller Punkte P mit der Eigenschaft, daß die Strecke $\overline{MP}$ mit r übereinstimmt. Die* **abgeschlossene Kugel** *mit Mittelpunkt M und Radius r ist die Menge aller Punkte P mit $\overline{MP} \leq r$. Die* **offene Kugel** *mit Mittelpunkt M und Radius r ist die Menge aller Punkte P mit $\overline{MP} < r$.*

Es ist klar, daß für eine vorgegebene Ebene E und einen Punkt M in E der Kreis bzw. die Kreisscheibe mit Mittelpunkt M und Radius r in E gerade der Durchschnitt von E mit der Sphäre bzw. Kugel mit Mittelpunkt M und Radius r ist. Die Wichtigkeit von Kreisen liegt und damit $\mathrm{Rad}\,\beta = V_0 \cap \mathrm{Rad}\,\beta$, also $\mathrm{Rad}\,\beta \subseteq V_0$. Insgesamt gilt $V_0 = \mathrm{Rad}\,\beta$. Weiter sei U ein Unterraum mit $V_+ \subsetneqq U$, auf dem β positiv definit ist. Dann gilt $V = U + V_- + V_0$ und nach der Dimensionsformel für Unterräume daher

$$\begin{aligned} \dim\bigl(U \cap (V_- \oplus V_0)\bigr) &= \dim U + \dim(V_- \oplus V_0) - \dim V \\ &= \dim U - \dim V_+ \ > 0 \end{aligned}$$

und damit $U \cap (V_- \oplus V_0) \neq \{0\}$. Das ist aber unmöglich, weil β positiv definit auf U und negativ semidefinit auf $V_- \oplus V_0$ ist. Also ist V_+ ein maximaler Unterraum, auf dem β positiv definit ist. Analog ist V_- ein maximaler Unterraum, auf dem β negativ definit ist.

(b) Es sei V_+ ein maximaler Unterraum, auf dem β positiv definit ist; wir setzen $U := (V_+)^\perp$. Nach (58.10) gilt dann $V = V_+ \oplus U$, und offensichtlich gilt $\mathrm{Rad}\,\beta \subseteq U$. Ferner ist β negativ semidefinit auf U; gäbe es nämlich ein Element $u \in U$ mit $\beta(u,u) > 0$, so wäre β positiv definit auf $V_+ \oplus \mathbb{R}u$, was der Maximalität von V_+ widerspräche. Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung auf $-\beta\,|_{U\times U}$ zeigt, daß $\beta(u,v)^2 \leq \beta(u,u)\beta(v,v)$ für alle $u,v \in U$ gilt. Gälte also $\beta(u,u) = 0$ für ein Element $u \in U$, dann auch $\beta(u,v) = 0$ für alle $v \in V$ und damit wegen $V = U^\perp \oplus U$ sogar $\beta(u,v) = 0$ für alle $v \in V$; ist also $\beta(u,u) = 0$ für ein $u \in U$, so gilt $u \in \mathrm{Rad}\,\beta$. Ist also V_- irgendein Vektorraumkomplement von $\mathrm{Rad}\,\beta$ in U, so ist β negativ definit auf V_-; damit ist dann $V = V_+ \oplus V_- \oplus \mathrm{Rad}\,\beta$ eine Standardzerlegung von (V,β). Vollkommen analog zeigt man, daß jeder maximale Unterraum, auf dem β negativ definit ist, als V_--Anteil einer Standardzerlegung von V auftritt.

(c) Da β positiv definit auf V_+ und negativ semidefinit auf $\overline{V}_- \oplus \mathrm{Rad}\,\beta$ ist, haben wir $V_+ \cap \bigl(\overline{V}_- \oplus \mathrm{Rad}\,\beta\bigr) = \{0\}$ und damit

$$\begin{aligned} \dim V_+ &= \dim(V_+ + \overline{V}_- + \mathrm{Rad}\,\beta) - \dim(V_- \oplus \mathrm{Rad}\,\beta) \\ &\leq \dim V - \dim(\overline{V}_- \oplus \mathrm{Rad}\,\beta) \ = \ \dim \overline{V}_+\,. \end{aligned}$$

Vertauschen wir die Rollen der beiden Standardzerlegungen, so erkennen wir, daß auch $\dim \overline{V}_+ \leq \dim V_+$ gilt, insgesamt also $\dim \overline{V}_+ = \dim V_+$. Vollkommen analog sehen wir die Gleichung $\dim \overline{V}_- = \dim V_-$ ein.

(d) Dies folgt unmittelbar aus (b) und (c). ■

Wir haben jetzt alles beisammen, um einen vollständigen Klassifikationssatz für reelle symmetrische Bilinearformen aufzustellen.

(58.17) Satz. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum.*

(a) *Jede symmetrische Bilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ läßt sich durch eine Matrix der Form*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_p & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_q & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_s \end{bmatrix}$$

darstellen. Die Zahlen p, q, s sind dabei eindeutig bestimmt. (Man bezeichnet das Tripel (p,q,s) als den **Index** *und die Differenz $p - q$ als die* **Signatur** *von β.)*

(b) *Zwei symmetrische Bilinearformen auf V sind genau dann äquivalent, wenn sie den gleichen Index besitzen.*

(c) *Zwei symmetrische Bilinearformen auf V sind genau dann äquivalent, wenn sie den gleichen Rang und die gleiche Signatur besitzen.*

Beweis. Die Existenz der Darstellung wurde bereits in (58.12)(c) bewiesen, die Eindeutigkeit folgt aus (58.16). Der Rest der Behauptung ist trivial. ■

59. Volumenfunktionen

Sind $a, b, c \in \mathfrak{V}$ Vektoren im Vektorraum $\mathfrak{V}$ aller Pfeilklassen, so bezeichnen wir die Punktmenge $\mathfrak{S}(a,b,c) := \{ra + sb + tc \mid 0 \leq r,s,t \leq 1\}$ als den von a, b und c aufgespannten Spat (oder, vornehmer, als das von a, b und c aufgespannte Parallelepiped).

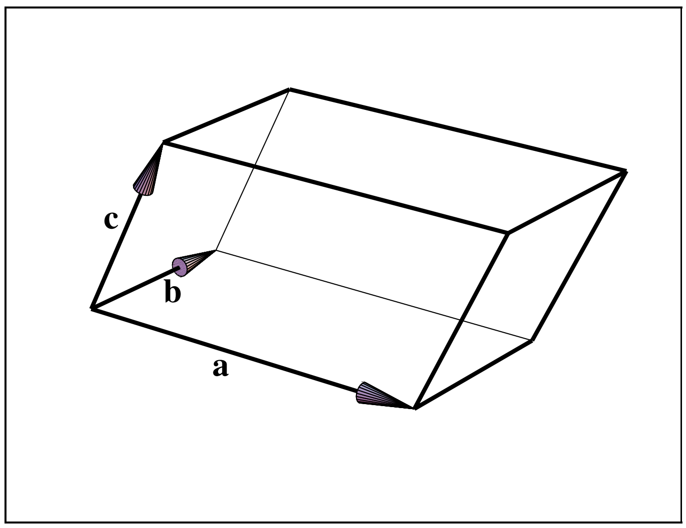

Abb. 59.1: Spat in $\mathfrak{V}$.

Für solche Spate wollen wir nun den Begriff eines orientierten (also vorzeichenbehafteten) Volumens herleiten. Tun wir einmal so, als wüßten wir, was das Volumen $V(a,b,c)$ des Spates $\mathfrak{S}(a,b,c)$ ist.† Sicher ist genau dann $V(a,b,c) = 0$, wenn a, b und c linear abhängig sind, wenn also der Spat $\mathfrak{S}(a,b,c)$ zu einem Parallelogramm, einem Liniensegment oder einem Punkt entartet ist; nehmen wir also an, a, b und c seien linear unabhängig. Wir können dann die Fälle unterscheiden, daß a, b und c (in dieser Reihenfolge!) wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger

† Etwa aufgrund physikalischer Argumentation: wir legen willkürlich eine Volumeneinheit fest, beispielsweise den Inhalt der Kaffeetasse, die ich beim Schreiben dieser Zeilen vor mir stehen habe, und fragen, wie oft sich diese Volumeneinheit in (eine physikalische Realisierung von) $\mathfrak{S}(a,b,c)$ einfüllen läßt, bevor der Kaffee überläuft.

unserer rechten oder unserer linken Hand zeigen, und nennen das Tripel (a,b,c) dementsprechend ein Rechtssystem oder ein Linkssystem. Als orientiertes Volumen des Spates $\mathfrak{S}(a,b,c)$ bezeichnen wir dann die reelle Zahl $\mathrm{vol}(a,b,c) :=$

$$\begin{cases} V(a,b,c), & \text{falls } (a,b,c) \text{ ein Rechtssystem ist,} \\ 0, & \text{falls } a,\ b \text{ und } c \text{ linear abhängig sind,} \\ -V(a,b,c), & \text{falls } (a,b,c) \text{ ein Linkssystem ist.} \end{cases}$$

Wir beachten, daß $\mathrm{vol}(a,b,c)$ eine Funktion der Vektoren a, b und c ist, nicht nur eine Funktion der Punktmenge $\mathfrak{S}(a,b,c)$. Dieses vorzeichenbehaftete Volumen ist nun algebraisch wesentlich leichter zu handhaben als das gewöhnliche Volumen, denn es hat die charakteristische Eigenschaft, linear von jedem seiner Argumente abzuhängen: die Additivität in jeder Komponente drückt dabei die Volumeninvarianz unter Scherungen aus, die Homogenität den geometrischen Sachverhalt, daß sich das Volumen bei Streckung einer der Seiten um den Faktor λ ver$|\lambda|$facht, wobei für $\lambda < 0$ eine Umkehrung der Orientierung hinzukommt.

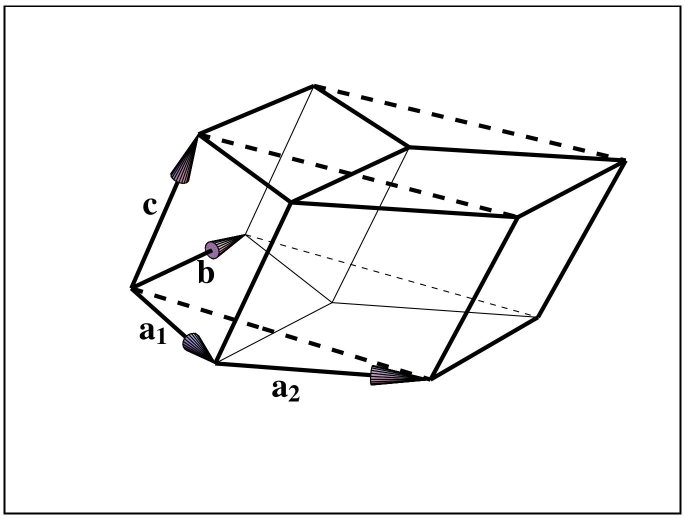

Abb. 59.2: Additivität des orientierten Volumens in jedem Argument: $\mathrm{vol}(a_1{+}a_2,b,c) = \mathrm{vol}(a_1,b,c){+}\mathrm{vol}(a_2,b,c)$.

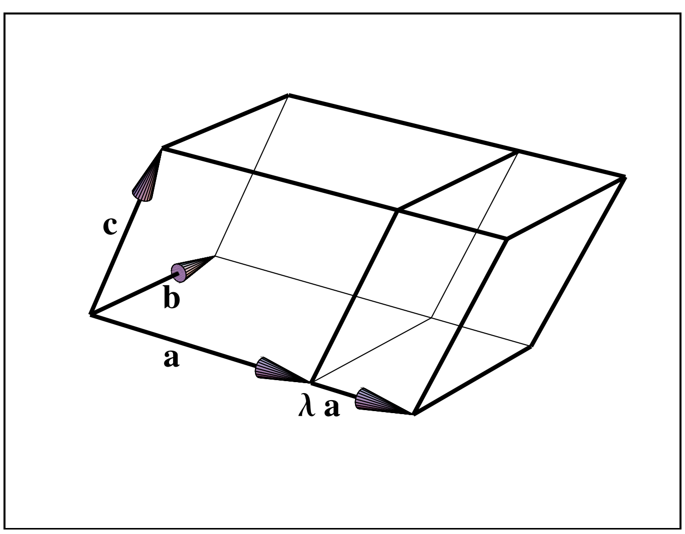

Abb. 59.3: Homogenität des orientierten Volumens in jedem Argument: $\mathrm{vol}(\lambda a,b,c) = \lambda\cdot\mathrm{vol}(a,b,c)$.

Es ist nun eine bemerkenswerte Tatsache, daß eine auf diesen Beobachtungen beruhende Theorie orientierter Volumina rein algebraisch entwickelt werden kann (in beliebigen endlichdimensionalen Vektorräumen und über beliebigen Grundkörpern), ohne daß auf irgendeinen zuvor definierten Volumenbegriff (der oben nur motivationshalber herangezogen wurde) zurückgegriffen werden müßte. Diese Sichtweise, zuerst systematisch vertreten durch Hermann Graßmann (1809-1877) in seiner "Ausdehnungslehre", wird im vorliegenden Abschnitt entwickelt werden; dieser kann als eine geometrische Herleitung des Determinantenbegriffs aufgefaßt werden, die die rein arithmetische Herleitung des Abschnittes 36 ergänzt. Natürlich können die abstrakten Volumenfunktionen, die wir einführen werden, im allgemeinen nicht wirklich als physikalische "Volumina" von Punktmengen interpretiert werden, aber die suggestive geometrische Terminologie wird uns helfen, eine Intuition für abstrakte Volumenfunktionen zu entwickeln.

(59.1) Definition. *Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Eine Abbildung*

$$\mathrm{vol}: \begin{array}{ccc} V\times\cdots\times V & \to & K \\ (v_1,\ldots,v_n) & \mapsto & \mathrm{vol}(v_1,\ldots,v_n) \end{array}$$

heißt **Volumenfunktion** *für V, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:*

(1) vol *ist linear in jedem Argument, d.h., für alle Vektoren $v_1,\ldots,v_n,a,b\in V$ und alle Skalare $\lambda,\mu\in K$ gilt die Gleichung* $\mathrm{vol}(v_1,\ldots,\lambda a+\mu b,\ldots,v_n) = \lambda\cdot\mathrm{vol}(v_1,\ldots,a,\ldots,v_n)+\mu\cdot\mathrm{vol}(v_1,\ldots,b,\ldots,v_n)$*;*

(2) *sind $v_1,\ldots,v_n\in V$ linear abhängig, so gilt* $\mathrm{vol}(v_1,\ldots,v_n)=0$.

Eine Volumenfunktion heißt **nichttrivial**, *wenn sie nicht identisch Null ist.*

Wir zeigen nun, daß Bedingung (2) durch eine andere Bedingung ersetzt werden kann, die manchmal einfacher zu behandeln ist.

(59.2) Hilfssatz. *Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Es sei* $\mathrm{vol}: V^n\to K$ *eine Funktion, die linear in jedem ihrer n Argumente ist, also die Bedingung* (59.1)(1) *erfüllt. Wir betrachten die folgenden Bedingungen:*

(2) *sind die Vektoren $v_1,\ldots,v_n$ linear abhängig, so ist* $\mathrm{vol}(v_1,\ldots,v_n)=0$*;*

(2′) *gibt es Indizes $i\neq j$ mit $v_i=v_j$, so ist* $\mathrm{vol}(v_1,\ldots,v_n)=0$*;*

(2″) *bei Vertauschung zweier Argumente wechselt* vol *das Vorzeichen.*

Dann ist (2) *äquivalent zu* (2′) *und impliziert* (2″). *Gilt* $\mathrm{char}K\neq 2$, *dann impliziert* (2″) *auch* (2′), *so daß in diesem Fall alle drei Bedingungen äquivalent sind.*

Beweis. Die Implikation (2) $\Longrightarrow$ (2′) ist trivial. Um die Implikation (2′) $\Longrightarrow$ (2) zu beweisen, nehmen wir