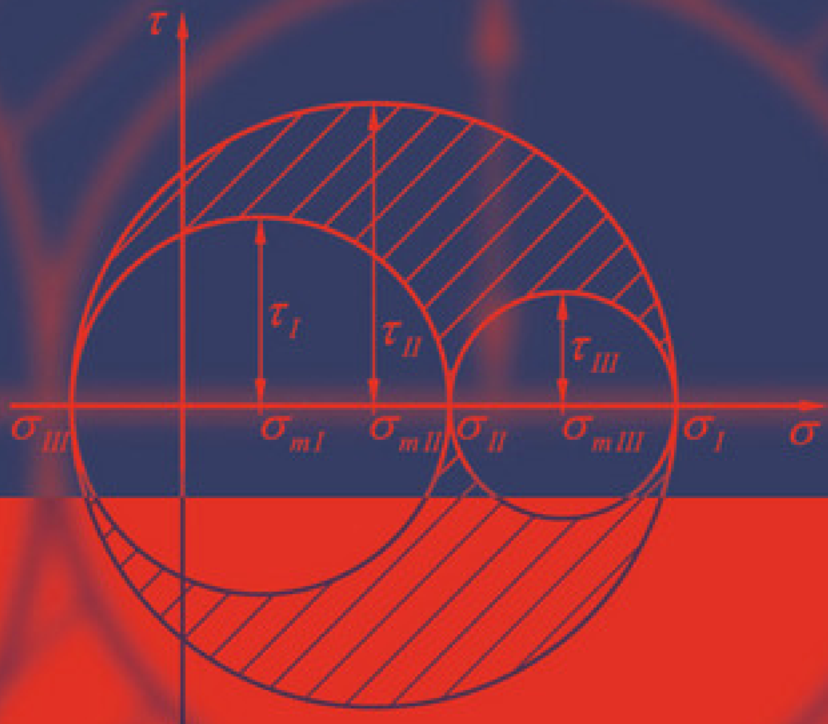
Kienzler · Schröder

Einführung in die Höhere Festigkeitslehre



Springer

Springer-Lehrbuch

Reinhold Kienzler • Roland Schröder

Einführung in die Höhere Festigkeitslehre

Springer

Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kienzler
Universität Bremen
Fachbereich Produktionstechnik /
Maschinenbau und Verfahrenstechnik
Fachgebiet Technische Mechanik –
Strukturmechanik (FB4/FG15-IW3)
Am Biologischen Garten 2
28359 Bremen
rkienzler@uni-bremen.de

Dipl.-Ing. Roland Schröder
Universität Bremen
Fachbereich Produktionstechnik /
Maschinenbau und Verfahrenstechnik
Fachgebiet Technische Mechanik –
Strukturmechanik (FB4/FG15-IW3)
Am Biologischen Garten 2
28359 Bremen
roland@mechanik.uni-bremen.de

ISSN 0937-7433
ISBN 978-3-540-89324-0 e-ISBN 978-3-540-89325-7
DOI 10.1007/978-3-540-89325-7
Springer Dordrecht Heidelberg London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Einbandentwurf: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorbemerkung

In der vorliegenden „Einführung in die Höhere Festigkeitslehre“ werden die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie in kartesischen Koordinaten unter Verwendung der Tensorschreibweise abgeleitet. Sie bilden einerseits die Grundlage der Berechnung und Bemessung von zwei- und dreidimensionalen Konstruktionen des Ingenieurwesens, dies sowohl für analytische Lösungen, analytische Abschätzungen und Näherungen als auch für numerische Berechnungen. Insbesondere ist hier die weitverbreitete und vielseitig einsetzbare Finite-Elemente-Methode (FEM) zu nennen.

Andererseits bietet die sichere Beherrschung der Grundgleichungen die Basis zur Ableitung verallgemeinerter Formulierungen, z.B. ihre Darstellung in krummlinigen und/oder schiefwinkligen Koordinatensystemen, die Erweiterung auf eine geometrisch nicht-lineare Theorie, Berücksichtigung von nicht-linearem Materialverhalten (Plastizität, Viskoelastizität usw.).

Durch die Beschränkung auf kartesische Koordinaten und Tensoren werden zwar die Vorteile der Indexschreibweise unmittelbar sichtbar, der eigentliche Vorteil einer koordinaten-invarianten Formulierung der Grundgleichungen geht jedoch verloren. Die Feldgleichungen und Randbedingungen lassen sich in einem dem Problem angepassten Koordinatensystem (z.B. Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten) leichter formulieren und lösen. Trotzdem wurde in dieser Einführung bewusst auf die Verwendung krummliniger und schiefwinkliger Koordinatensysteme verzichtet, um das Verständnis der Grundlagen nicht durch zu viel Tensorformalismus zu verschleiern. An entsprechender Stelle wird auf weiterführende Literatur verwiesen.

Nach dem Besuch der Grundvorlesungen in Technischer Mechanik ist es in der Regel noch ein weiter Weg, bis die Kenntnisse erworben sind, um Fachbücher und Veröffentlichungen zur Elastizitätstheorie und zu verwandten Gebieten lesen und verstehen zu können. Meist sind diese in Tensorschreibweise abgefasst, die im Grundkurs oft noch nicht verwendet wird. Diese Lücke soll das Buch „Einführung in die Höhere Festigkeitslehre“ überbrücken helfen, indem die Studenten nach dem Grundkurs „abgeholt“ und behutsam in die Indexschreibweise eingeführt werden. Um den Anschluss an andere Lehrbücher und Schreibweisen zu erleichtern, werden die Gleichungen auch in symbolischer Schreibweise dargestellt.

Das Buch baut auf den Kenntnisstand des Grundkurses der Technischen Mechanik 1 und 2, also Statik und Elastostatik, auf, die an allen Universitäten in etwa gleichem Umfang in den ersten beiden Semestern eines Ingenieurstudiengangs gelesen werden. Im Buch wird regelmäßig auf den Grundkurs verwiesen. Um die entsprechenden Stellen konkreter angeben zu können, haben wir uns dazu entschlossen, uns regelmäßig auf die beiden Bücher „Technische Mechanik Band 1: Statik“ und „Technische Mechanik Band 2: Elastostatik“ der Autoren GROSS, HAUGER, SCHRÖDER und WALL zu beziehen. Natürlich lässt sich der so angesprochene Stoff auch mit eigenen Skripten oder mit anderen Lehrbüchern zum Grundkurs Mechanik wiederholen, da die Inhalte ähnlich gegliedert und bis auf geringfügige Varianten gleich dargestellt sind. Im Buch werden die entsprechenden Stellen mit [GHSW 1 oder 2: Kapitel (evtl. Unterkapitel)] zitiert.

In gleicher Weise gehen wir bei Hinweisen zu den erforderlichen mathematischen Grundlagen vor, die bis auf ganz wenige Ausnahmen Gegenstand des Grundkurses Ingenieurmathematik ist. Hier beziehen wir uns auf die Bände 1, 2 und 3 der „Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler“ von PAPULA, das auch viele Übungsaufgaben enthält, was hilfreich ist, wenn eine Methode noch nicht richtig „sitzt“. Die entsprechenden Stellen werden mit [Papula 1, 2 oder 3: Kapitel (evtl. Unterkapitel)] zitiert. Auch hier lassen sich die entsprechenden Stellen in anderen Lehrbüchern schnell finden, in komprimierter Form beispielsweise im „Taschenbuch der Mathematik“ von BRONSTEIN und SEMENDJAJEW.

Hin und wieder werden mehrere Gleichungen im Text mit einer gemeinsamen Gleichungsnummer versehen. Wenn dann an einer anderen Stele des Buches auf eine einzelne Gleichung Bezug genommen wird, wird diese z.B. mit (2.4.19b) angegeben, wobei stillschweigend angenommen wird, dass die zweite Gleichung (2.4.19) angesprochen ist.

Jedes Kapitel (außer der Einleitung) enthält Bemerkungen, Beispiele und Übungsaufgaben. Die Bemerkungen geben Hinweise, die für das Verständnis der folgenden Ausführungen nicht unbedingt erforderlich sind. Sie enthalten Zusatzinformationen, erinnern an bekannte Dinge aus dem Grundkurs oder verweisen auf weiterführende Sachverhalte mit entsprechenden Literaturangaben.

In den Beispielen wird die Anwendung des vermittelten Stoffes ausführlich dargestellt, so dass die Vorgehensweise bei der Lösung von Problemstellungen schrittweise nachvollzogen werden kann. Man scheue sich nicht, die Lösung durch „Mitrechnen“ auf separatem Papier selbst mit zu erarbeiten.

Es ist allgemein bekannt, dass das vollständige Durchdringen der Lehrinhalte in der Mechanik nicht durch Nachvollziehen von Musterlösungen sondern nur durch selbständiges Üben möglich ist. Deshalb finden sich am Ende der Kapitel eine Zusammenstellung von Übungsaufgaben. Einige Übungen wiederholen lediglich Fragestellungen vorangegangener Beispiele. Durch deren Bearbeitung kann man sicherstellen, dass man den Stoff auch wirklich verstanden hat und man im Stande ist, verwandte Aufgaben auch selbständig lösen zu können. Andere Übungen verlangen ein wenig eigenes Nachdenken und etwas Fertigkeit beim Hantieren mit den bereitgestellten Formeln. Einige wenige Übungen sind tatsächlich anspruchsvoll und man sollte sich nicht dadurch entmutigen lassen, wenn die Lösung nicht gleich gelingt. Bei der Identifikation von Übungen als „anspruchsvoll“ sollte man allerdings zurückhaltend sein.

Am Ende des Buches sind die Lösungen der Übungsaufgaben zusammengestellt. Die Autoren sind sich bewusst, dass dieses Angebot eine Versuchung für nicht charakterfeste Leser darstellt. Eigentlich sind die Angaben nur als Überprüfung des **vorab** selbständigen Lösungsversuchs gedacht. Für „einfache“ Übungen wird nur das Ergebnis angegeben, die Lösungsvorschläge für „anspruchsvollere“

Übungen enthalten ausführlichere Hinweise, während die Lösungen der „schwereren“ Übungen vollständig dargestellt werden.

Nach einer kurzen Einleitung, in der die Aufgaben der Höheren Festigkeitslehre umrissen werden, behandelt das zweite Kapitel den Spannungszustand. Dieses Kapitel ist durch seine ausführliche Darstellung recht umfangreich. Nachdem im ersten Abschnitt durch die Einführung von Spannungsvektor und Spannungstensor die Index-Schreibweise motiviert wurde, wird im zweiten Abschnitt das „Handwerkszeug“ zum Umgang mit der Index-Schreibweise vermittelt. Obwohl der unmittelbare Nutzen dieses etwas trockenen Stoffes noch nicht recht zu erkennen ist, empfiehlt es sich, diesen Abschnitt besonders sorgfältig („mit Papier und Bleistift“) durchzuarbeiten, da für den Rest des Buches der sichere Umgang mit KRONECKER-Symbol und Permutationstensor vorausgesetzt wird. Bei Zweifel oder Unsicherheit scheue man sich nicht, alle Summen ausführlich hin zu schreiben. Nachdem der Tensorcharakter der „Spannungsmatrix“ festgestellt ist, werden verschiedene Eigenschaften des Spannungstensors abgeleitet, die in dieser Form für alle Tensoren zweiter Stufe gelten. Indem diese Sachverhalte sehr gründlich besprochen werden, können die erzielten Ergebnisse in den anderen Kapiteln unmittelbar übernommen und damit erheblich kürzer abgehandelt werden.

Im dritten Kapitel wird der Verzerrungszustand direkt im Rahmen der linearisierten Theorie abgeleitet. Wir beschreiten also nicht (wie in vielen Lehrbüchern zu finden) den „Umweg“, die Kinematik zunächst für große Deformationen zu formulieren und den so gewonnenen nicht-linearen Verzerrungstensor anschließend zu linearisieren. Die nicht-lineare Theorie wird im Rahmen dieser Einführung auch an anderer Stelle nicht benötigt. Den Verzerrungs-Verschiebungsgleichungen werden noch die Kompatibilitätsbedingungen an die Seite gestellt.

Der Beweis des Satzes von CESARO haben wir in eine (sehr anspruchsvolle) Übungsaufgabe verbannt, um den Fluss des Stoffes nicht unnötig zu unterbrechen, den Leser aber trotzdem mit dem Beweisgang bekannt zu machen.

Das vierte Kapitel widmet sich dem Elastizitätsgesetz. Da anisotrope Werkstoffe zunehmend an Bedeutung gewinnen (man denke an faserverstärkte Strukturen in der Luft- und Raumfahrt oder an piezoelektrische Materialien in der Informationstechnologie), wird das Elastizitätsgesetz zunächst für anisotropes Materialverhalten formuliert und darauf folgend der Einfluss von Materialsymmetrien besprochen. Man gelangt so Schritt für Schritt über Monotropie, Orthotropie und transversaler Isotropie zur Isotropie. Weitere Symmetrieformen werden in den Übungen behandelt. Leser, die (zunächst nur) an isotropem Werkstoffverhalten interessiert sind, können diesen Abschnitt überspringen, ohne an Verständnis für die folgenden Abschnitte einzubüßen. Ein Abschnitt behandelt den Einfluss von Temperaturänderungen auf das Werkstoffverhalten. Hier wird (aber nur ansatzweise) versucht, die Brücke zur Technischen Thermodynamik zu schlagen.

Kapitel 5 befasst sich mit Lösungsansätzen der Elastizitätstheorie. Die Terme, die von der Temperaturänderung herrühren, werden weitgehend mitgenommen, da sie den Gang der Ableitungen nicht erschweren und bei konstanter Temperatur einfach weggelassen werden können. Um Enttäuschungen vorzubeugen, sei vermerkt, dass hier nicht auf Lösungen von konkreten Problemen eingegangen wird, sondern generelle analytische Ansätze vorgestellt werden, damit man die Struktur der Grundgleichungen besser durchdringen kann. Nach der Lektüre der vorliegenden Einführung wird man sich in allen Lehrbüchern zur Festigkeitslehre und Elastizitätstheorie schnell zurechtfinden und die Lösung von vielen konkreten Beispielen leicht nachvollziehen oder selbständig lösen können, was das eigentliche Anliegen dieses Buches ist.

Alle Kapitel behandeln zunächst die dreidimensionale Theorie. Jedem Kapitel ist aber auch ein Abschnitt beigestellt, der die Besonderheit von ebenen, also zweidimensionalen Problemen herausstellt. Ebene Probleme sind einer analytischen Behandlung eher zugänglich als dreidimensionale.

Wenn diese Einführung auch keine numerischen Lösungsverfahren behandelt, soll nochmals betont werden, dass die analytischen Verfahren in keiner Weise in Konkurrenz zu numerischen Verfahren stehen. Vielfach ist es gar nicht möglich, geschlossene analytische Lösungen für Probleme, insbesondere mit komplizierten Berandungen, anzugeben. Das Buch soll aber Fähigkeiten vermitteln, wie durch einfache analytische Abschätzungen die Sinnhaftigkeit von numerischen Ergebnissen überprüft werden kann.

Das Buch ist aus Vorlesungen mit dem gleichen Titel entstanden, die vor Studierenden der Produktionstechnik – Maschinenbau, Verfahrenstechnik – des fünften bzw. sechsten Semesters gehalten wurden. Wir sind den Studierenden für Anregung und Kritik während der zurückliegenden Jahre dankbar und würden uns auch in Zukunft über Verbesserungsvorschläge und Hinweise auf Fehler von Leserseite freuen.

Das Manuskript wurde von den Mitarbeitern des Fachgebiets Technische Mechanik – Strukturmechanik gründlich durchgesehen. Wir danken deshalb Dr.-Ing. F. Jablonski, Dipl.-Phys. K. Kutschan, Dipl.-Ing. R. Malekmohammadi, Dr.-Ing. M. Mehrafza, Dr.-Ing. I. Ott, Dr.-Ing. R. Ristau, Dipl.-Ing. L. Rohde und Dipl.-Ing. K. Schuischel für viele wertvolle Hinweise zur Verbesserung der Darstellung. Unser besonderer Dank gilt Frau B. Neumeister für ihre unermüdliche Geduld und Mühe bei der Manuskripterstellung. Schließlich bedanken wir uns beim Springer-Verlag für die gute Zusammenarbeit.

Bremen im Juni 2009

R. Kienzler R. Schröder

Inhaltsverzeichnis

Liste der meist verwendeten Symbole

Allgemeines

Koordinatensysteme

x, y, z x_1, x_2, x_3	kartesische Koordinatensysteme im Raum
$x_{1'}, x_{2'}, x_{3'}$	ein gegenüber dem Ausgangskoordinatensystem (x_1, x_2, x_3) gedrehtes kartesisches Koordinatensystem
x, y x_1, x_2	kartesisches Koordinatensystem in der Ebene
r, φ	ebene Polarkoordinaten

Tensoren

λ	Tensor nullter Stufe (Skalar)
$\vec{a}$	Tensor erster Stufe (Vektor) wird als Spaltenvektor aufgefasst
$\vec{a}^{\,T}$	transponierter Vektor, wird als Zeilenvektor aufgefasst
a_i	Komponente eines Vektors. Die Bezeichnungen $\vec{a}$ und a_i werden synonym verwendet
$\vec{a}\,\vert_i$	weist auf die i-te Komponente des Vektors $\vec{a}$ hin
$a = \vert\vec{a}\vert$	Betrag des Vektors $\vec{a}$
$\underline{\underline{b}}$	Tensor zweiter Stufe (Dyade)
b_{ij}	Komponente eines Tensors zweiter Stufe. Die Bezeichnungen $\underline{\underline{b}}$ und b_{ij} werden synonym verwendet
c_{ijk}	Komponenten eines Tensors dritter Stufe (Triade)
$\mathbb{E}$	Tensor vierter Stufe (Tetrade)
$E_{ijk\ell}$	Komponenten eines Tensors vierter Stufe. Die Bezeichnungen $\mathbb{E}$ und $E_{ijk\ell}$ werden synonym verwendet

Mathematische Symbole

$=$	ist gleich
$\cong$	ist ungefähr gleich
$\hat{=}$	entspricht

$\equiv$	ist identisch
$:=$	ist gleich per definitionem
$\sim$	ist proportional zu
$\rightarrow$	wird zu
$\Rightarrow$	daraus folgt
$\Leftrightarrow$	ist äquivalent (dann und nur dann)
$\lvert\ \rvert$	Betrag
$\cup$	Vereinigung
$\cap$	Durchschnitt
$\varnothing$	Nullmenge
$O(\ )$	Glieder der Ordnung
$\big\rvert_S$	ausgewertet am Rand S
$\big\rvert_\Gamma$	ausgewertet entlang der Randkurve Γ

Verknüpfung

$\lambda = \vec{a} \cdot \vec{b} \rightarrow \lambda = a_i b_i$	Skalarprodukt
$\lambda = \underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}} \rightarrow \lambda = a_{ij} b_{ji}$	doppeltes Skalarprodukt
$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \rightarrow c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$	Vektorprodukt
$\underline{\underline{c}} = \vec{a} \otimes \vec{b} \rightarrow c_{ij} = a_i b_j$	dyadisches Produkt
$\lambda = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] \rightarrow \lambda = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$	Spatprodukt
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	Matrixdarstellung von $\underline{\underline{a}}$
$\det \underline{\underline{a}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$	Determinante der Matrix $\underline{\underline{a}}$

Ableitungen

$\dfrac{d(\ )}{dx} = (\ )'$	totale Ableitung bei Funktionen einer Veränderlichen, hier: x
$\dfrac{d(\ )}{dt} = \dot{(\ )}$	Ableitung nach der Zeit

$\dfrac{\partial(\ )}{\partial x_i} = (\ )_{,i}$	Partielle Ableitung bei Funktionen mehrerer Veränderlicher x_i
$\left.\dfrac{\partial(\ )}{\partial \varepsilon}\right\|_{\theta}$	Partielle Ableitung nach z.B. der Verzerrung ε bei z.B. festgehaltener Temperaturänderung θ

Differenzialoperatoren

$d(\ ) = (\ )_{,i}\, dx_i$	totales Differenzial
$\vec{\nabla}(\ ) = (\ )_{,i}\, \underset{i}{\vec{e}}$	Nabla-Operator
$\vec{f} = \operatorname{grad} \lambda = \vec{\nabla}\lambda \rightarrow f_i = \lambda_{,i}$	Gradient eines Skalars
$\lambda = \operatorname{div} \vec{\mathrm{v}} = \vec{\nabla} \bullet \vec{\mathrm{v}} \rightarrow \lambda = \mathrm{v}_{i,i}$	Divergenz eines Vektors
$\vec{f} = \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \vec{\nabla} \bullet \underline{\underline{\sigma}} \rightarrow f_i = \sigma_{ji,j}$	Divergenz eines Tensors
$\vec{f} = \operatorname{rot} \vec{\mathrm{v}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{v}} \rightarrow f_i = \varepsilon_{ijk} \mathrm{v}_{k,j}$	Rotation eines Vektors
$\underline{\underline{\varepsilon}} = \operatorname{def} \vec{u} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla} \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \vec{\nabla}\right) \rightarrow$ $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j})$	Deformator eines Vektors
$\underline{\underline{\eta}} = \operatorname{ink} \underline{\underline{\varepsilon}} = \vec{\nabla} \times \underline{\underline{\varepsilon}} \times \vec{\nabla} \rightarrow$ $\eta_{ij} = \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{j\ell n} \varepsilon_{mn,k\ell} = \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{j\ell n} \varepsilon_{k\ell,mn}$	Inkompatibilität eines Tensors
$\Delta(\ ) = \vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla}(\ ) \rightarrow \Delta(\ ) = (\ )_{,ii}$	LAPLACE-Operator im Raum
$\bar{\Delta}(\ ) = (\ )_{,\alpha\alpha}$	LAPLACE-Operator in der Ebene

Indizes

Index ***unten rechts*** *von einer Variablen*

$i, j, k, \ldots$	Tensorindizes mit den Werten 1, 2, 3
$i', j', k', \ldots$	Tensorindizes im transformierten Koordinatensystem
x, y, z	Koordinatenrichtungen im (x, y, z) -Koordinatensystem
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	Tensorindizes mit den Werten 1, 2
$A, B, C, \ldots$	Vektor-/Matrixindizes mit den Werten 1, 2, …, 6
1, 2, 3	Zählindex bei Eigenwerten und Invarianten

G	Gestaltänderung
N	Normalkraft, Stab
T	Temperatur, thermisch
V	Volumen, Volumenänderung
max	Maximalwert
okt	Oktaederebene
p	Druck
0	vorgegebene konstante Größe, Referenzzustand

Indizes ***unter*** *einer Variablen*

i, j	Koordinatenrichtung, z.B. ist $\underset{2}{\vec{e}}$ der Einheitsvektor in x_2-Richtung
n	Schnittfläche mit dem Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$, z.B. ist $\underset{n}{\vec{t}}$ der Spannungsvektor, der in der Schnittfläche mit dem Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ wirkt
okt	Oktaeder-Schnittfläche
I, II, III	Hauptachsenrichtungen

Symbole ***oben rechts*** *von einer Variablen*

A	antisymmetrischer Anteil
D	deviatorischer Anteil
H	hydrostatischer Anteil
S	symmetrischer Anteil
T	Transponiert
th	thermisch
'	im transformierten Koordinatensystem
*	- Hauptachsenrichtung bei Normaleneinheitsvektoren $\vec{n}$ und bei Transformationsmatrizen $\underline{\underline{a}}$ - Vorgegebene Größe am Rand bei Spannungsvektoren $\vec{t}$ und bei Verschiebungsvektoren $\vec{u}$ - Ergänzungsenergie (Kapitel 4) bei Energieausdrücken - Natürliche Basisinvarianten (Übung 2.2) bei Invarianten I_i
**	Hauptschubspannungsrichtung